



# THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le 17 novembre 2014 par :

**Djaouad BENACHIR**

Méthodes de séparation aveugle de sources pour le démixage d'images de télédétection

---

---

## JURY

CHRISTIAN JUTTEN

Professeur GIPSA-lab, Grenoble

Rapporteur

ERIC MOREAU

Professeur ISITV, Toulon

Rapporteur

JOCELYN CHANUSSOT

Professeur GIPSA-lab, Grenoble

Examineur

YANNICK DEVILLE

Professeur IRAP-UPS, Toulouse

Dir. de Thèse

ABDELKADER HAMEURLAIN

Professeur IRT-UPS, Toulouse

Co-Dir. de Thèse

SHAHAM HOSSEINI

Maître de Conférences

Encadrant

IRAP-UPS, Toulouse

---

École doctorale et spécialité :

*MITT : Image, Information, Hypermedia*

Unité de Recherche :

*Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)*

Directeur(s) de Thèse :

*Yannick DEVILLE et Abdelkader HAMEURLAIN*

Rapporteurs :

*Christian JUTTEN et Eric MOREAU*

# Sommaire

|           |   |
|-----------|---|
| Notations | v |
|-----------|---|

|              |     |
|--------------|-----|
| Abréviations | vii |
|--------------|-----|

## Chapitre 1

### Introduction générale

|       |                                                                  |   |
|-------|------------------------------------------------------------------|---|
| 1.1   | L'imagerie de télédétection en observation de la Terre . . . . . | 2 |
| 1.1.1 | La télédétection : historique et résumé . . . . .                | 2 |
| 1.1.2 | Technologie des capteurs de télédétection . . . . .              | 4 |
| 1.1.3 | Caractéristiques des images de télédétection . . . . .           | 6 |
| 1.2   | Analyse d'images de télédétection . . . . .                      | 7 |
| 1.3   | Structure des images de télédétection . . . . .                  | 8 |
| 1.4   | Problématique de cette thèse . . . . .                           | 8 |

|               |    |
|---------------|----|
| Bibliographie | 13 |
|---------------|----|

## Chapitre 2

### Séparation Aveugle de Sources (SAS)

|       |                                                                        |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1   | Introduction . . . . .                                                 | 16 |
| 2.2   | Généralités . . . . .                                                  | 16 |
| 2.2.1 | Objectif . . . . .                                                     | 17 |
| 2.2.2 | Mélanges Linéaires . . . . .                                           | 18 |
| 2.3   | Méthodes classiques de SAS . . . . .                                   | 20 |
| 2.3.1 | Méthodes basées sur l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI) . .   | 21 |
| 2.3.2 | Méthodes basées sur la Factorisation en Matrices Non-négatives (NMF) . | 28 |
| 2.3.3 | Méthodes basées sur l'Analyse en Composantes Parcimonieuses (ACPa) .   | 31 |
| 2.3.4 | Approches bayésiennes . . . . .                                        | 39 |
| 2.4   | Conclusion . . . . .                                                   | 40 |

**Bibliographie 41**

**Chapitre 3**

**Démélange spectral non supervisé**

|       |                                                                                                 |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1   | Introduction . . . . .                                                                          | 48 |
| 3.2   | Généralités . . . . .                                                                           | 48 |
| 3.3   | Principales méthodes géométriques de démélange spectral . . . . .                               | 53 |
| 3.3.1 | Méthodes géométriques avec pixels purs . . . . .                                                | 53 |
| 3.3.2 | Méthodes géométriques sans pixels purs . . . . .                                                | 55 |
| 3.4   | Application des méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) à l'imagerie spatiale . . . . . | 56 |
| 3.5   | Conclusion . . . . .                                                                            | 60 |

**Bibliographie 61**

**Chapitre 4**

**Démélange d'images hyperspectrales par NMF initialisée avec une ACI modifiée**

|       |                                                      |    |
|-------|------------------------------------------------------|----|
| 4.1   | Introduction . . . . .                               | 66 |
| 4.2   | Limites de l'ACI et de la NMF . . . . .              | 67 |
| 4.3   | Approche proposée (modifICA-NMF) . . . . .           | 68 |
| 4.3.1 | Modification de l'ACI . . . . .                      | 68 |
| 4.3.2 | Elimination de l'indétermination d'échelle . . . . . | 70 |
| 4.3.3 | Initialisation de la NMF . . . . .                   | 73 |
| 4.4   | Résultats expérimentaux . . . . .                    | 74 |
| 4.4.1 | Critères de performances . . . . .                   | 75 |
| 4.4.2 | Test 1 . . . . .                                     | 75 |
| 4.4.3 | Test 2 . . . . .                                     | 78 |
| 4.4.4 | Test 3 . . . . .                                     | 81 |
| 4.4.5 | Test 4 . . . . .                                     | 87 |
| 4.4.6 | Tests effectués sur données réelles . . . . .        | 89 |
| 4.5   | Conclusion . . . . .                                 | 93 |

**Bibliographie 95**

**Chapitre 5**

**Démélange d'images multi- et hyper-spectrales : parcimonie et propriétés géométriques**

|                                                                                 |                                                           |            |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------|
| 5.1                                                                             | Introduction . . . . .                                    | 98         |
| 5.2                                                                             | Quelques propriétés . . . . .                             | 98         |
| 5.3                                                                             | Approche proposée (BiS-Corr) . . . . .                    | 102        |
| 5.3.1                                                                           | Etape de détection de zones bi-sources . . . . .          | 104        |
| 5.3.2                                                                           | Etape d'identification de la matrice de mélange . . . . . | 105        |
| 5.3.3                                                                           | Etape d'estimation des cartes d'abondance . . . . .       | 110        |
| 5.4                                                                             | Résultats expérimentaux . . . . .                         | 111        |
| 5.4.1                                                                           | Critères de performances . . . . .                        | 111        |
| 5.4.2                                                                           | Tests effectués . . . . .                                 | 113        |
| 5.5                                                                             | Conclusion . . . . .                                      | 127        |
| <b>Bibliographie</b>                                                            |                                                           | <b>129</b> |
| <b>Conclusion générale et perspectives</b>                                      |                                                           | <b>131</b> |
| <b>Annexes</b>                                                                  |                                                           |            |
| <b>Annexe A</b>                                                                 |                                                           |            |
| <b>Informations supplémentaires concernant les tests 2 et 3</b>                 |                                                           |            |
| <b>Annexe B</b>                                                                 |                                                           |            |
| <b>Informations supplémentaires concernant le Test 4</b>                        |                                                           |            |
| <b>Annexe C</b>                                                                 |                                                           |            |
| <b>Démonstration de la validité du critère bi-source de la méthode BiS-Corr</b> |                                                           |            |
| <b>Annexe D</b>                                                                 |                                                           |            |
| <b>Variante de la méthode BiS-Corr</b>                                          |                                                           |            |
| D.1                                                                             | Rappels . . . . .                                         | 143        |
| D.2                                                                             | Description de la nouvelle variante BiS-Corr-2 . . . . .  | 144        |
| D.3                                                                             | Résultats expérimentaux . . . . .                         | 145        |
| <b>Annexe E</b>                                                                 |                                                           |            |
| <b>Etude relative à la conception d'une base de données</b>                     |                                                           |            |



# Notations

## Scalaire, vecteurs et matrices :

|               |                                                                           |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $x$           | Scalaire                                                                  |
| $\mathbf{x}$  | Vecteur                                                                   |
| $X$           | Matrice                                                                   |
| $x_{ij}$      | (ij)-ème élément de la matrice $X$                                        |
| $(.)^T$       | Symbole de transposition (peut être appliqué à un vecteur ou une matrice) |
| $\ \cdot\ $   | Norme $l_2$ (pour les vecteurs)                                           |
| $\ \cdot\ _F$ | Norme de Frobenius (pour les matrices)                                    |

## Séparation Aveugle de Sources (SAS) :

|             |                                                                                                   |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $s_m(t)$    | Valeur de la source $m$ à un instant $t$                                                          |
| $x_\ell(t)$ | Valeur de l'observation $\ell$ à un instant $t$                                                   |
| $L$         | Nombre d'observations                                                                             |
| $M$         | Nombre de sources                                                                                 |
| $A$         | Matrice de mélange ( $L \times M$ ), composée des différents coefficients de mélange $a_{\ell m}$ |

## Démélange Spectral :

|              |                                                                                             |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $f_m(n)$     | Fraction d'abondance du matériau pur $m$ (dans le pixel $n$ )                               |
| $r_{\ell m}$ | Réflectance du matériau pur $m$ dans la $\ell^{\text{ème}}$ bande spectrale                 |
| $x_\ell(n)$  | Réflectance observée dans la $\ell^{\text{ème}}$ bande spectrale (pour un pixel donné $n$ ) |
| $L$          | Nombre de bandes spectrales                                                                 |
| $N$          | Nombre de pixels                                                                            |
| $M$          | Nombre de sources                                                                           |
| $R$          | Matrice des spectres des endmembers                                                         |
| $F$          | Matrice des fractions d'abondance                                                           |
| $X$          | Matrice des observations (ou image observée)                                                |



# Abréviations

|                |                                                                                              |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ACI</b>     | Analyse en Composantes Indépendantes<br>(ou ICA pour “Independent Component Analysis”)       |
| <b>ACP</b>     | Analyse en Composantes Principales<br>(ou PCA pour “Principal Component Analysis”)           |
| <b>ACPa</b>    | Analyse en Composantes Parcimonieuses<br>(ou SCA pour “Sparse Component Analysis”)           |
| <b>AD</b>      | Attenuated and Delayed                                                                       |
| <b>AMUSE</b>   | Algorithm for Multiple Unknown Signals Extraction                                            |
| <b>ALS</b>     | Alternating Least Squares                                                                    |
| <b>CWT</b>     | Transformée en ondelettes continue<br>(Continuous Wavelet Transform)                         |
| <b>CCA</b>     | Convex Cone Analysis                                                                         |
| <b>DUET</b>    | Degenerate Unmixing Estimation Technique                                                     |
| <b>DOA</b>     | Direction Of Arrival                                                                         |
| <b>DEMIX</b>   | Direction Estimation of Mixing matrIX                                                        |
| <b>EM</b>      | Expectation Maximization                                                                     |
| <b>ENVI</b>    | ENvironment for Visualizing Images                                                           |
| <b>FMN</b>     | Factorisation en Matrices Non-négatives<br>(ou NMF pour “Non-negative Matrix Factorization”) |
| <b>FastICA</b> | Fast Independent Component Analysis                                                          |
| <b>FMP</b>     | Factorisation en Matrices Positives<br>(ou PMF pour “Positive Matrix Factorization”)         |
| <b>FCLS</b>    | Fully Constrained Least Squares                                                              |
| <b>HySime</b>  | HYperspectral Signal identification by minimum error                                         |
| <b>iid</b>     | indépendantes et identiquement distribuées                                                   |
| <b>IEA</b>     | Iterative Error Analysis                                                                     |
| <b>ICE</b>     | Iterative Constrained Endmembers                                                             |
| <b>JADE</b>    | Joint Approximate Diagonalization of Eigen-matrices                                          |
| <b>MLI</b>     | Mélange Linéaire Instantané                                                                  |
| <b>MISO</b>    | Multiple-Input Single-Output                                                                 |
| <b>MV</b>      | Maximum de Vraisemblance                                                                     |
| <b>MDCT</b>    | Modified Discrete Cosine Transform<br>(transformée en cosinus discrète modifiée)             |
| <b>MNF</b>     | Maximum Noise Fraction                                                                       |
| <b>MVT</b>     | Minimum Volume Transform                                                                     |
| <b>MVC-NMF</b> | Minimum Volume Constrained Non-negative<br>Matrix Factorization                              |



|                |                                                                          |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------|
| <b>MVSA</b>    | Minimum Volume Simplex Analysis                                          |
| <b>MVES</b>    | Minimum Volume Enclosing Simplex                                         |
| <b>NCLS</b>    | Non-negative Constrained Least Squares                                   |
| <b>NMSE</b>    | Normalized Mean Squared Error<br>(erreur quadratique moyenne normalisée) |
| <b>OSP</b>     | Orthogonal Subspace Projection                                           |
| <b>PPI</b>     | Pixel Purity Index                                                       |
| <b>SAS</b>     | Séparation Aveugle de Sources<br>(ou BSS pour “Blind Source Separation”) |
| <b>SA</b>      | Signal Aléatoire                                                         |
| <b>SOBI</b>    | Second-Order Blind Identification                                        |
| <b>SMACC</b>   | Sequential Maximum Angle Convex Cone                                     |
| <b>SISAL</b>   | Simplex Identification via Split Augmented Lagrangian                    |
| <b>SAM</b>     | Spectral Angle Mapper<br>(angle spectral)                                |
| <b>TFCT</b>    | Transformation de Fourier à Court Terme                                  |
| <b>TF</b>      | Temps-Fréquence                                                          |
| <b>TiFROM</b>  | TIme-Frequency Ratios Of Mixtures                                        |
| <b>TiFCORR</b> | TIme-Frequency CORRelation                                               |
| <b>VA</b>      | Variable Aléatoire                                                       |
| <b>VD</b>      | Virtual Dimensionality                                                   |
| <b>VCA</b>     | Vertex Component Analysis                                                |
| <b>WDO</b>     | W-Disjoint-Orthogonality                                                 |

# Chapitre 1

## Introduction générale

### Contents

---

|            |                                                                         |          |
|------------|-------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1.1</b> | <b>L'imagerie de télédétection en observation de la Terre . . . . .</b> | <b>2</b> |
| 1.1.1      | La télédétection : historique et résumé . . . . .                       | 2        |
| 1.1.2      | Technologie des capteurs de télédétection . . . . .                     | 4        |
| 1.1.3      | Caractéristiques des images de télédétection . . . . .                  | 6        |
| <b>1.2</b> | <b>Analyse d'images de télédétection . . . . .</b>                      | <b>7</b> |
| <b>1.3</b> | <b>Structure des images de télédétection . . . . .</b>                  | <b>8</b> |
| <b>1.4</b> | <b>Problématique de cette thèse . . . . .</b>                           | <b>8</b> |

---

Dans ce chapitre, nous rappelons les principes de base de l'imagerie de télédétection. A ce titre, et après un bref historique sur ce domaine, nous présenterons la technologie associée aux capteurs de télédétection, ainsi que les caractéristiques des images obtenues à partir de ces derniers. Nous aborderons par ailleurs, les principales étapes du processus d'analyse de l'imagerie, permettant ainsi la présentation de la structure des données comme étant un cube à deux dimensions spatiales et une dimension spectrale. Plus précisément, nous parlerons dans cette partie du chapitre, de la problématique liée à la présence de pixels mélangés (appelés parfois "mixels"), possédant une signature spectrale composée du mélange de celles de plusieurs matériaux présents dans le même pixel. Enfin, nous présenterons brièvement l'objectif attendu des travaux relatifs à cette thèse.

## 1.1 L'imagerie de télédétection en observation de la Terre

### 1.1.1 La télédétection : historique et résumé

La télédétection est *l'ensemble des connaissances et techniques utilisées pour déterminer à distance les propriétés d'objets, naturels ou artificiels, à partir des rayonnements qu'ils émettent ou réfléchissent* [1].

Dans les temps présents, cette discipline est devenue, pour de nombreux domaines, une source d'informations abondantes et précises pour les chercheurs qui vont essayer, à partir d'instruments aéroportés ou spatioportés, de collecter et d'extraire l'information utile associée au domaine considéré. Il serait intéressant à ce propos de consulter [2] où l'ensemble des termes techniques, utilisés en télédétection, sont détaillés et définis en langue française (afin de permettre aux utilisateurs de se familiariser avec la terminologie y ayant trait).

Historiquement, la télédétection est apparue vers la 1<sup>ère</sup> guerre mondiale avec l'installation sur des avions de matériel photographique (instruments aéroportés) principalement à des fins de reconnaissance militaire. A partir de cette période, la télédétection n'a cessé de s'améliorer. Les grandes dates marquantes sont [2] :

(1950) : période marquée par l'extension de la télédétection aéroportée aux domaines civils (urbanisme, habitat, agriculture, géologie, ...).

(1970) : période marquée par le lancement des premiers satellites multispectraux d'observation de la Terre, en particulier le satellite américain ERTS-1 (Earth Resources Technology Satellite, appelé plus tard LANDSAT).

(1980) : Apparition des premiers satellites à haute résolution spatiale, en particulier le satellite «Landsat-4» (en 1982) et le satellite français «SPOT-1» (Système Probatoire d'Observation de la Terre en 1986).

(2000) : Apparition des instruments à très haute résolution spatiale et des premiers instruments hyperspectraux [3].

Depuis cette dernière date, la technologie liée aux instruments de télédétection (particulièrement celle des capteurs) n'a cessé de progresser (augmentation du nombre de pixels, miniaturisation des sous-systèmes, amélioration des performances spatiales ou spectrales, ...).

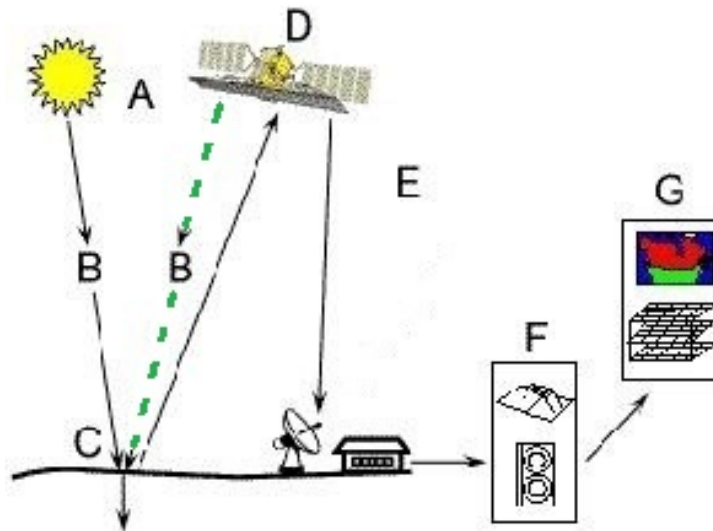


FIGURE 1.1 – Résumé du processus de télédétection (adapté de [4])

Sans rentrer dans les détails physiques, on peut résumer le processus de télédétection (illustré dans la figure 1.1) de la manière suivante [4, 5, 1] :

Une source (A) de rayonnement électromagnétique, représentée dans ce cas de figure par le soleil (ou bien un instrument de type radar), illumine une cible (le terme cible désigne une surface imagée au niveau du sol).

Ce rayonnement électromagnétique passe à travers l'atmosphère (B) et interagit avec cette dernière par des phénomènes de diffusion et d'absorption. Ce rayonnement peut être transmis ou dévié de sa trajectoire initiale, ou même parfois bloqué avant d'arriver au sol (voir [1] pour plus de détails concernant les effets de la diffusion). Après avoir franchi cette barrière atmosphérique, ce rayonnement interagit enfin avec la cible (C) qui va, l'absorber, le diffuser ou bien le réfléchir, ceci en fonction de la longueur d'onde du rayonnement mais également de la nature physique de la surface concernée.

Le rayonnement réfléchi par le sol interagit encore une fois avec l'atmosphère (B) avant d'être enregistré par le capteur (D), et envoyé au sol (E) sous forme numérique.

Enfin, pour que l'information reçue par les capteurs aéroportés ou spatioportés devienne exploitable ou utilisable par les utilisateurs finaux (G), il sera nécessaire d'effectuer au préalable certains pré-traitements (F).

Ce rayonnement, reçu par les capteurs (D) selon leurs domaines spectraux en employant une combinaison de filtres et un type de détecteur, est caractérisé par une longueur d'onde (ou une fréquence). En fonction de cette longueur d'onde, le rayonnement peut prendre des noms différents (comme illustré dans la figure 1.2).

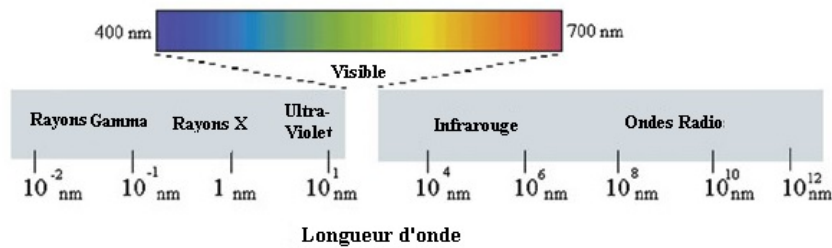


FIGURE 1.2 – Le spectre électromagnétique

### 1.1.2 Technologie des capteurs de télédétection

En télédétection, on mesure au niveau d'un capteur, à une longueur d'onde donnée, la puissance reçue en provenance d'une source naturelle (par exemple la Terre, l'atmosphère ou divers objets de l'Univers) et on cherche à déterminer la luminance énergétique. Celle-ci représente la puissance émise par une cible dans une direction donnée par unité d'angle solide et par unité d'aire de la surface apparente de la source dans cette direction (en  $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$ ).

On distingue deux types de capteurs : passifs et actifs. Les capteurs passifs enregistrent le rayonnement naturel émis ou réfléchi par les cibles. L'autre type de capteurs, dit actifs (RADAR par exemple) émettent artificiellement un rayonnement qui est rétrodiffusé par le milieu observé et détecté par le même capteur (voir la ligne en pointillés dans la figure 1.1). Dans la suite de ce manuscrit, on ne parlera que des capteurs passifs.

La plupart des capteurs de télédétection (passifs) appelés également **radiomètres**, ont une architecture interne similaire. Comme illustré en figure 1.3, celle-ci est divisée en deux parties majeures :

- La partie optique
- Un amplificateur et un système d'enregistrement, constituant la partie électronique.

Ce type de capteurs transforme l'énergie électromagnétique réfléchie ou émise à partir d'une cible en un signal électrique numérisé ; il est constitué d'un ou de plusieurs détecteurs (photodiodes, Charge-Coupled Devices "CCD" ou capteurs infrarouge), de filtres et/ou d'un séparateur spectral (selon les bandes spectrales choisies) et d'un dispositif optique pour focaliser l'image sur le détecteur. Ce dispositif peut être à base de réflexion (combinaison de miroirs), réfraction (combinaison de lentilles), ou bien les deux à la fois.

La superficie du pixel de l'image dépend du système recevant le rayonnement ainsi que de la sensibilité du détecteur. Ce détecteur a pour rôle de convertir l'énergie radiative en un courant électrique faible, qui sera amplifié et transformé en un signal numérique grâce à un amplificateur et un système d'enregistrement variant d'un détecteur à un autre, donnant lieu à une image sur plusieurs bandes spectrales [5, 1].

Pour ce type de capteurs, il existe plusieurs méthodes d'acquisition d'images :

#### (1) Système à balayage :

Ce dernier est généralement basé sur la rotation ou l'oscillation d'un miroir. Le balayage des lignes de l'image est assuré soit par la rotation complète du satellite sur lui-même (cas des satel-

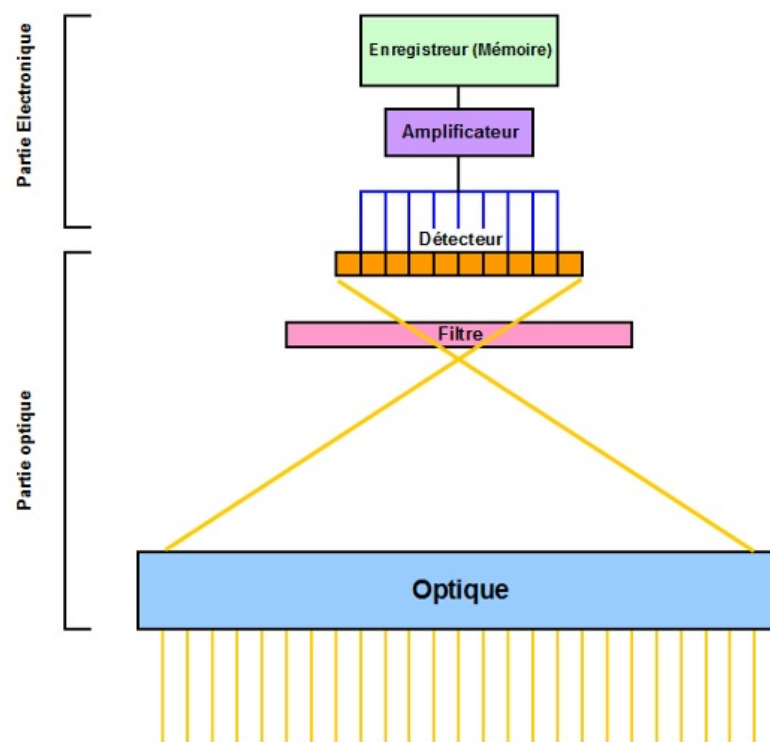


FIGURE 1.3 – Principaux composants d'un radiomètre

lites Météosat), soit par la rotation ou l'oscillation d'un miroir (cas des satellites Landsat) dans la direction perpendiculaire au trajet du satellite (ou de l'avion, dans le cas de la télédétection aéroportée). Les colonnes de l'image quant à elles, sont acquises par rotation d'un miroir (Météosat), ou bien par avancée du satellite (Landsat). Ce type de technologie (système à balayage) est de moins en moins utilisé, principalement en raison du développement plus récent des CCD à barrettes. Ces derniers sont détaillés dans le paragraphe suivant.

(2) Système *Push-broom* :

Ce système est considéré comme étant plus simple et plus souple à mettre en place par rapport au système précédent. Appelé également *système à barrettes*, il permet l'acquisition simultanée des pixels de chaque ligne de l'image. Ce dernier est composé de 1728 à 12000 détecteurs CCD qui reçoivent en même temps l'information de plusieurs milliers de pixels placés sur une même ligne (par exemple les satellites SPOT).

(3) Système *matriciel* :

Cette dernière catégorie de capteurs, développée plus récemment que les deux premières (balayage et push-broom), est caractérisée par la simultanéité d'acquisition de tous les pixels de l'image (lignes et colonnes). Il est à préciser que ce type de capteurs est peu utilisé en raison notamment du nombre important de détecteurs induisant des difficultés pour les opérations d'étalonnage radiométrique.

### 1.1.3 Caractéristiques des images de télédétection

Les principales caractéristiques à prendre en compte lors du choix des images de télédétection sont [6] :

(1) **La résolution spatiale :**

Plus la résolution spatiale est fine et plus l'image obtenue à partir du satellite est détaillée. La résolution spatiale désigne l'aptitude des capteurs à distinguer deux petits objets spatialement adjacents. Ce type de résolution dépend du champ instantané d'observation du capteur (ou "IFOV" en anglais, pour *Instantaneous Field Of View*) qui va déterminer les dimensions de la surface observée à un moment donné et ce, en fonction de l'altitude du satellite (ou de l'avion dans le cas de la télédétection aéroportée).

(2) **La résolution spectrale :**

Elle dépend du système optique du capteur (filtre), et désigne l'aptitude d'un capteur à distinguer les légères différences d'un même objet au niveau du sol pour des longueurs d'ondes différentes. Plus la résolution spectrale est fine, plus l'information sur les cibles est riche et précise permettant une meilleure interprétation des spectres mesurés. L'imagerie hyperspectrale par exemple, peut contenir entre 20 et plus de 200 bandes spectrales étroites et contiguës avec une résolution de l'ordre de 10 nm (en fonction du capteur utilisé). Au contraire, l'imagerie multispectrale, classiquement utilisée en télédétection spatiale contient entre 2 et 20 bandes spectrales généralement plus larges et non contiguës.

**(3) La résolution radiométrique :**

Un peu plus haut, nous avons présenté l'architecture interne des capteurs de télédétection. Dans la partie électronique du capteur, le signal électrique provenant des détecteurs est converti en nombres entiers, codés en 8, 10 ou 12 bits (en fonction des capteurs utilisés) et représentant des grandeurs physiques (par exemple la luminance énergétique). La résolution radiométrique désigne la capacité d'un capteur à différencier pour une cible les valeurs des grandeurs physiques mesurées et ce, au niveau de la même bande spectrale. Dans le cas d'un codage sur 10 bits, par exemple, on obtient des valeurs (en niveau de gris) comprises entre 0 et 1023, augmentant ainsi la capacité à faire la différence entre deux cibles presque similaires (en comparaison par exemple à un codage sur 8 bits où les valeurs sont comprises entre 0 et 255).

**(4) La résolution temporelle :**

Appelée également "temps de revisite", elle est définie comme l'intervalle de temps nécessaire pour un satellite afin d'observer une même surface au sol à partir du même point dans l'espace.

## 1.2 Analyse d'images de télédétection

Nous abordons dans cette section les principales étapes du processus d'analyse de l'imagerie de télédétection depuis la réception des données brutes fournies par le capteur jusqu'à la présentation des résultats aux utilisateurs.

La première partie est liée aux opérations de pré-traitement de l'image reçue au niveau du sol (représentée dans la figure 1.1 par (F)). Celles-ci dépendent de l'application considérée, du type de capteur utilisé ainsi que de l'image produite par ce dernier. L'objectif des opérations de pré-traitement est d'améliorer les images reçues et corriger de la meilleure façon possible les erreurs liées au bruit induit par le capteur ou bien les perturbations atmosphériques. Une explication plus détaillée de ces opérations peut être trouvée dans plusieurs ouvrages spécialisés dans le domaine, comme par exemple [6, 1]. Enfin, il est à noter que les principales corrections appliquées sont des corrections géométrique, radiométrique et atmosphériques (ou plutôt compensations atmosphériques).

Une autre opération aussi importante que le pré-traitement, est celle liée au traitement des données corrigées (représentée dans la figure 1.1 par (G)). Celle-ci a pour rôle principal la production de cartes d'occupation du sol. Dans cette partie du processus d'analyse, chaque pixel de l'image sera affecté à une seule classe d'occupation. Pour y arriver, plusieurs méthodes de classification pouvant être regroupées en deux catégories, sont généralement utilisées :

- (1) Méthodes de classification non assistées (ou non supervisées), dans lesquelles aucune information a priori sur la nature des cibles n'est disponible. Ceci étant, une intervention mineure d'un opérateur est souvent nécessaire à des fins de vérification et de production des sorties. Parmi les méthodes les plus connues, on peut citer la méthode des centres mobiles.
- (2) Méthodes de classification assistées (ou supervisées) qui sont basées sur l'expérience d'un expert (dans les domaines étudiés par exemple) ou d'un opérateur afin d'obtenir le résultat voulu. Parmi les méthodes les plus connues, on peut citer la classification par maximum de vraisemblance.



### 1.3 Structure des images de télédétection

A ce stade de notre manuscrit et pour la suite, on ne parle plus des pré-traitements introduits ci-dessus (géométrique, radiométrique ou autres). On considère ainsi les images reçues à partir des stations de réception au sol (après pré-traitement) comme étant un cube de données à deux dimensions spatiales et une dimension spectrale, comme représenté dans la figure 1.4. Il est à signaler qu’aucune distinction ne sera plus faite entre une image aéroportée et spatioportée. Par ailleurs, en ce qui concerne les longueurs d’onde utilisées, on se limite aux domaines réflectifs, c-à-d le visible et le proche infrarouge (entre 0,4 et 2,5  $\mu\text{m}$ ). Chaque cube est représenté comme une superposition d’images spectrales correspondant chacune à une des longueurs d’onde utilisées. Il est possible de distinguer au niveau de la figure 1.4 la différence entre les spectres obtenus à partir de capteurs multispectraux (figure 1.4-(b)) et ceux obtenus à partir des capteurs hyperspectraux (figure 1.4-(a)). A chaque pixel spatial, d’un cube hyperspectral, correspond un spectre de réflectance<sup>1</sup> en un grand nombre de bandes spectrales étroites et contiguës.

### 1.4 Problématique de cette thèse

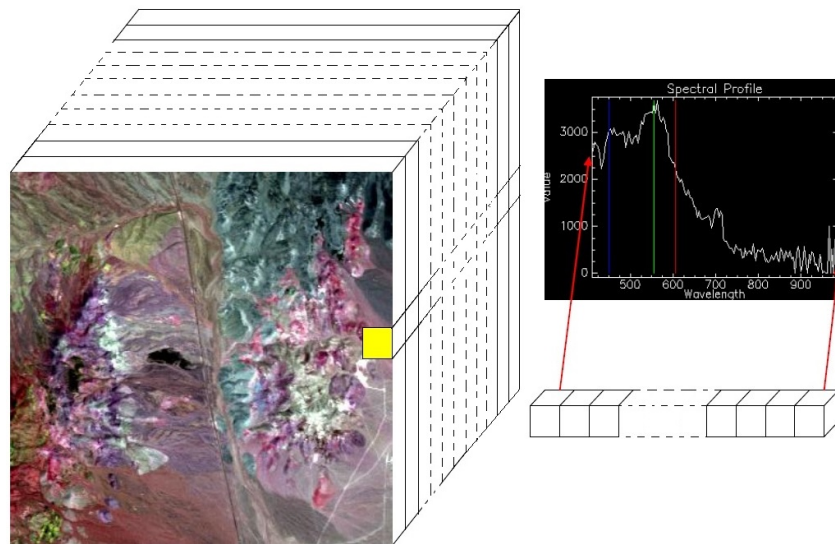
La télédétection (en observation de la Terre) a pour but de profiter des informations disponibles (spatiales ou spectrales) à l’effet d’identifier, de classifier, et d’analyser quantitativement les différents matériaux ou objets sans être en contact direct avec ces derniers. L’imagerie multispectrale est actuellement connue pour avoir une meilleure résolution spatiale que les images hyperspectrales. Cette caractéristique, qui, avec certains satellites (Pleiade par exemple) est passée sous la barre du mètre, permet aux utilisateurs de ce type de données de se focaliser sur les méthodes et techniques basées sur les riches informations spatiales. Au contraire, l’imagerie hyperspectrale orientée plutôt sur les applications liées à la détection de cibles particulières (civiles ou militaires), se focalise essentiellement sur l’information spectrale.

Chaque matériau pur présent dans l’image considérée est caractérisé par une signature spectrale (ou spectre de réflectance) unique basée sur les propriétés physiques du matériau en question. Il est à ce titre important de faire la différence entre le spectre de réflectance d’un matériau pur et le spectre de réflectance d’un pixel d’une image pouvant contenir plusieurs matériaux [5]. En effet, dans la majorité des techniques de traitement d’images et en particulier la classification pixel par pixel des éléments de l’image, des erreurs importantes peuvent être engendrées (en fonction du type de capteurs utilisés) en raison de la présence de “**pixels mélangés**” (voir figure 1.5). Ces derniers, appelés également “**mixels**”, présentent une signature spectrale ne correspondant à aucun matériau naturel ou artificiel présent dans l’image, mais plutôt un spectre composé du mélange des spectres de plusieurs matériaux présents dans le même pixel. Ce phénomène de pixels mélangés est dû principalement à la résolution spatiale des capteurs utilisés. En effet, si cette résolution n’est pas assez bonne, on risque d’avoir, comme illustré dans la figure 1.5, plusieurs matériaux purs à l’intérieur du même pixel, et par conséquent le spectre de réflectance observé au niveau de ce pixel sera forcément mélangé.

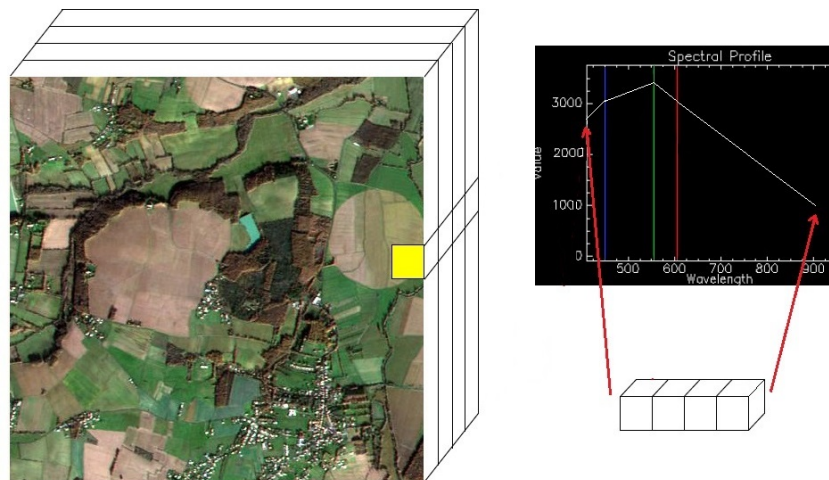
Parmi les problèmes rencontrés, on peut citer les difficultés d’identification ou bien de définition de certaines limites entre régions (ou classes) bien définies, souvent repérables visuellement

---

1. la réflectance est une grandeur physique représentée par le rapport entre le flux lumineux réfléchi par le sol (luminance) et le flux lumineux incident. Cette mesure n’a pas d’unité et est obtenue après les opérations de pré-traitement nécessaires pour transformer les informations reçues à partir des capteurs en données exploitables par les utilisateurs.



(a)



(b)

FIGURE 1.4 – Illustration de spectres d'images de télédétection : (a) hyperspectrale, (b) multispectrale

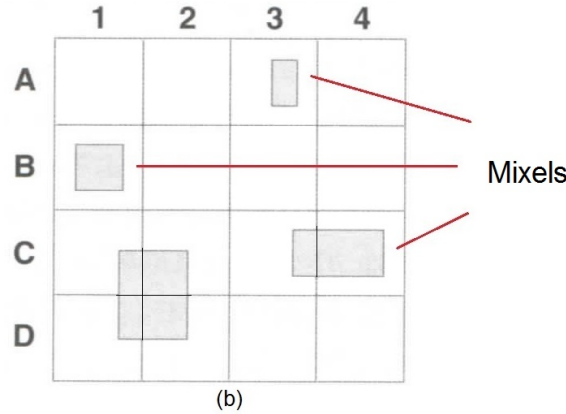


FIGURE 1.5 – Exemple d’une image contenant des mixels [5].

à grande échelle, mais nécessitant une analyse plus détaillée. Ainsi, les pixels mélangés peuvent d’une part, générer des erreurs dans le cas où on veut faire une superposition des cartes (produites à partir de la classification) sur des images, et d’autre part nous induire en erreur dans le cas où on veut mesurer la superficie d’une région (ou classe) particulière.

Pour éviter ce type de problèmes, nous proposons dans le cadre de cette thèse de mettre en place des méthodes dites de “Démélange Spectral”<sup>2</sup> (non supervisées), permettant la décomposition des spectres mélangés en un ensemble de spectres de matériaux purs (les matériaux purs sont également appelés endmembers) et en un autre ensemble de fractions d’abondance indiquant la proportion de chaque matériau pur dans chaque pixel.

Dans le cas où ce type de méthodes utilisent peu d’informations a priori, le démélange spectral peut être considéré comme un problème de Séparation Aveugle de Sources (SAS). Ainsi, les fractions d’abondance et les spectres des endmembers recherchés représentent respectivement en SAS, les signaux sources et la matrice de mélange (devant être estimés), ceci à partir d’une observation représentant l’image de télédétection considérée.

La suite de ce manuscrit est organisée de la manière suivante :

Les deuxième et troisième chapitres sont consacrés à la SAS et au démélange spectral. Nous commençons par présenter, au niveau du 2<sup>ème</sup> chapitre, des généralités concernant la SAS, ainsi qu’un état de l’art des méthodes classiques de SAS, avec une attention particulière aux méthodes qui seront exploitées dans notre travail, à savoir l’Analyse en Composantes Indépendantes (ACI), la Factorisation en Matrices Non-négatives (NMF), et l’Analyse en Composantes Parcimonieuses (ACPa). Par ailleurs, nous proposons dans le 3<sup>ème</sup> chapitre, de détailler quelques méthodes développées ces dernières années dans le cadre du démélange spectral, à savoir les principales méthodes géométriques existantes, puis continuons avec celles basées sur des méthodes de SAS (abordées dans le 2<sup>ème</sup> chapitre).

Dans le quatrième chapitre, après un bref rappel du modèle de mélange linéaire utilisé, nous

2. ou en anglais, spectral unmixing

détaillons une nouvelle approche de démixage spectral appliquée à l'imagerie de télédétection. Cette dernière, proposée dans le cadre de cette thèse, est appelée “modifICA-NMF” et est basée sur la combinaison de deux grandes classes de méthodes de SAS, à savoir une version modifiée de l'ACI et la NMF. Dans ce chapitre, nous montrons comment les contraintes physiques de notre problème peuvent être utilisées pour éliminer des indéterminations liées à l'ACI et fournir une première approximation des spectres de endmembers et des fractions d'abondance associées. Ces approximations sont ensuite utilisées pour initialiser un algorithme de NMF, avec pour objectif d'améliorer le résultat obtenu. Enfin, nous détaillons dans la suite de ce chapitre, les résultats d'expérimentations réalisées avec différents types de données.

Dans le cinquième chapitre, nous détaillons une nouvelle méthode de démixage spectral appelée “BiS-Corr”. Cette dernière, et au contraire de l'approche évoquée précédemment (modifICA-NMF), est fondée sur la parcimonie ainsi que sur des propriétés géométriques. Nous indiquons dans un premier temps quelques propriétés facilitant la présentation des hypothèses considérées dans la méthode en question. Puis, nous mettons en lumière les grandes lignes de la méthode proposée. Enfin, nous présentons la partie liée aux expérimentations réalisées avec différents types de données.

Pour terminer, une conclusion générale, incluant quelques perspectives de recherche, sera présentée dans le sixième et dernier chapitre.



# Bibliographie

- [1] P. Lier, C. Valorge, and X. Briottet, *Imagerie Spatiale : Des principes d'acquisition au traitement des images optiques pour l'observation de la Terre*, Cépaduès, France, 2008.
- [2] S. Paul, L. Depecker, C. Goillot, and M. Lenco, *Introduction à l'étude de la télédétection aérospatiale et de son vocabulaire*, La documentation française, 1991.
- [3] G. Shaw and D. Manolakis, "Signal processing for hyperspectral image exploitation," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, Issue 1, pp. 12–16, January 2002.
- [4] "Notions fondamentales de télédétection," in *Centre canadien de télédétection, Ressources naturelles Canada*, <http://www.rncan.gc.ca>.
- [5] M-C. Girard and C.M. Girard, *Traitement des données de télédétection, environnement et ressources naturelles, édition 2*, Dunod, Paris, 2010.
- [6] J. Gao, *Digital analysis of remotely sensed imagery*, McGraw-Hill, United States, 2009.



# Chapitre 2

## Séparation Aveugle de Sources (SAS)

### Contents

---

|            |                                                                      |           |
|------------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction</b>                                                  | <b>16</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Généralités</b>                                                   | <b>16</b> |
| 2.2.1      | Objectif                                                             | 17        |
| 2.2.2      | Mélanges Linéaires                                                   | 18        |
| <b>2.3</b> | <b>Méthodes classiques de SAS</b>                                    | <b>20</b> |
| 2.3.1      | Méthodes basées sur l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI)     | 21        |
| 2.3.2      | Méthodes basées sur la Factorisation en Matrices Non-négatives (NMF) | 28        |
| 2.3.3      | Méthodes basées sur l'Analyse en Composantes Parcimonieuses (ACPa)   | 31        |
| 2.3.4      | Approches bayésiennes                                                | 39        |
| <b>2.4</b> | <b>Conclusion</b>                                                    | <b>40</b> |

---



## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre démarche consiste d’abord à définir le problème de la Séparation Aveugle de Sources (SAS, ou BSS pour “Blind Source Separation”) en général, ainsi que les types de mélange qui lui sont liés. Nous présenterons par la suite les grandes classes de méthodes de SAS, à savoir l’Analyse en Composantes Indépendantes (ACI), la Factorisation en Matrices Non-négatives (FMN ou NMF pour Nonnegative Matrix Factorization)<sup>3</sup>, l’Analyse en Composantes Parcimonieuses (ACPa<sup>4</sup>) et enfin, nous aborderons également des méthodes basées sur les approches bayésiennes. Il est à noter que nous nous focaliserons plus sur les méthodes utilisant le modèle de mélange linéaire instantané; celles-ci vont nous être utiles par la suite dans nos travaux de démixage d’images de télédétection.

L’évolution rapide qu’a connue la SAS depuis une trentaine d’années a accentué le recours aux méthodes de traitement de signal qui y sont liées et a ouvert par conséquent les portes à de nombreuses applications. Le problème de la SAS a été introduit dans les années 1980, durant lesquelles J. Héroult, C. Jutten et B. Ans (voir [1] par exemple) ont présenté pour la première fois<sup>5</sup> leurs travaux, liés à la problématique de séparation de signaux composites (ou mélangés), inspirés par les messages véhiculés par les fibres nerveuses et donc dans un contexte biologique. Depuis, une multitude d’algorithmes basés sur cette problématique a été développée.

Le premier grand domaine d’application de la SAS concerne l’étude des signaux acoustiques, audio, et de parole (voir par exemple les articles suivants : [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Un autre domaine aussi important concerne les applications liées aux systèmes de transmission électromagnétique (voir par exemple les articles suivants : [12, 13, 14]). On peut trouver un autre grand domaine d’application qui est celui lié au biomédical (voir par exemple les articles suivants : [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]). Ces trois domaines ont évolué en parallèle et ont un intérêt commun - l’utilisation de méthodes de SAS - pour estimer des signaux appelés “sources” à partir de signaux mélangés, contenant ces sources. Il existe des ouvrages présentant de façon plus détaillée ce type de méthodes ainsi que les applications considérées, comme par exemple [23] ou bien [2, 24], ou encore plus récemment [25] et [26]. Les ouvrages en question abordent d’autres applications liées au traitement d’images autres que biomédicales, et en particulier à celle qui nous intéressent, à savoir la télédétection. Enfin, on peut également trouver dans ces ouvrages d’autres applications liées au domaine de la finance par exemple.

## 2.2 Généralités

La SAS consiste à estimer un ensemble de “signaux sources” inconnus, à partir d’un ensemble de signaux disponibles qui sont des “mélanges” des signaux sources recherchés, en ne connaissant pas (ou très peu) la transformation des signaux sources qui engendre leur mélange [27].

---

3. Pour désigner la Factorisation en Matrices Non-négatives, on retiendra dans la suite de ce manuscrit, l’acronyme NMF.

4. Pour désigner l’Analyse en Composantes Parcimonieuses, on retiendra dans la suite de ce manuscrit, l’acronyme ACPa et non pas ACP pour éviter de confondre avec l’Analyse en Composantes Principales.

5. il est à signaler [2] qu’une étude similaire au problème traité a également été proposée à la même période [3].

### 2.2.1 Objectif

La définition présentée ci-dessus résume la problématique générale sur laquelle repose la SAS. Afin de comprendre le principe général, imaginons un ensemble de signaux émis par des personnes (ou bien des objets). Ces signaux sont appelés “signaux sources”. Les signaux en question peuvent être, en fonction du domaine considéré, des signaux audio, ou bien des signaux électromagnétiques ou tout autre type de signal. Imaginons maintenant qu’on place des capteurs (ou récepteurs) installés à différents endroits afin d’enregistrer le “mélange” de ces signaux sources. Le fait de placer ces capteurs dans des endroits différents par rapport à l’émetteur des signaux sources permet l’enregistrement des mélanges, appelés dans ce qui suit “signaux observés”. On va faire dans un premier temps (version simple), les hypothèses suivantes :

- Le nombre de signaux observés est le même que celui des signaux sources. Ce dernier est fixé dans cette configuration à deux.
- Le mélange produit lors de la propagation des signaux sources vers les capteurs est, dans une version *simplifiée* du problème, de type linéaire instantané<sup>6</sup>. Ainsi, chaque signal observé à un instant  $t$  noté  $x_i(t)$ , en sortie de chaque capteur, peut être formulé en fonction des signaux sources (au même instant  $t$ ), notés  $s_j(t)$ , de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t), \\ x_2(t) &= a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t). \end{aligned}$$

Le terme séparation aveugle provient du fait que les coefficients de mélange  $a_{ij}$  ne sont pas connus, sinon, l’estimation des sources aurait été effectuée par simple inversion du modèle. La figure 2.1 illustre le cas où les signaux sources sont de nature acoustique. L’objectif de la SAS, dans ce cas, est la mise en place d’un système de séparation nous permettant d’estimer les signaux de parole obtenus en sortie de ce système, qu’on notera  $y_j(t)$ . Ces derniers représentent une estimation des signaux sources initiaux  $s_j(t)$ .

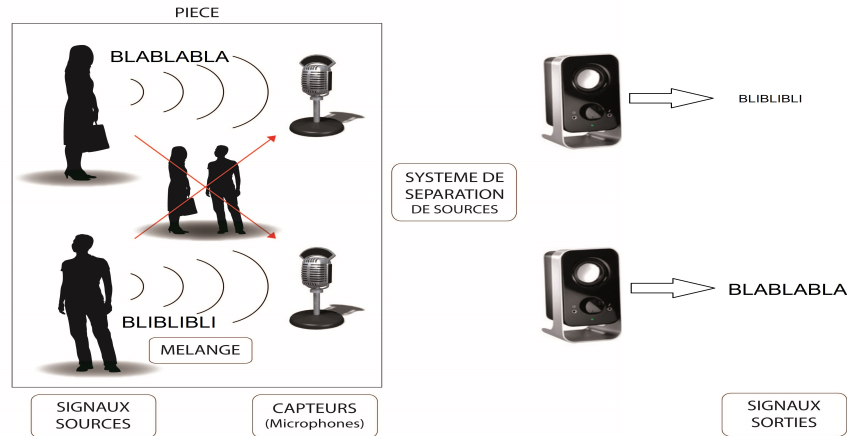


FIGURE 2.1 – Exemple de SAS

Quand le nombre des signaux sources est égal au nombre des signaux observés (comme c’est le cas au niveau de la figure 2.1), le mélange est dit déterminé. Il existe deux autres configurations de mélanges : sur-déterminé, dans lequel le nombre de sources est inférieur au nombre

6. Les différentes catégories de mélange linéaire seront détaillées dans la prochaine sous-section.

d'observations, et sous-déterminé qui présente au contraire, un nombre de sources supérieur au nombre d'observations. Dans ce dernier cas de figure, c-à-d celui du mélange sous-déterminé, les sources ne sont pas aussi faciles à estimer par rapport aux deux premières configurations. En résumé, et indépendamment du nombre de sources ou d'observations, voire même de l'application considérée, la configuration générale de la SAS peut être représentée comme illustré dans la figure 2.2.



FIGURE 2.2 – Configuration générale de la SAS

L'objectif principal de la SAS est donc l'identification des coefficients de mélange et l'estimation des signaux sources. L'estimation de ces derniers, est réalisée à partir des observations qui sont des "mélanges" des signaux sources recherchés. Avant de procéder à la séparation, il est important de préciser le rôle majeur du modèle de mélange utilisé qui représente en quelque sorte la relation existant entre les sources et les observations. Il existe deux grandes classes de mélange, d'une part le mélange linéaire, et d'autre part le modèle non linéaire qui est connu pour être plus complexe à traiter que le premier. Dans la suite de ce manuscrit on ne détaillera que le modèle linéaire qui est le modèle le plus étudié à ce jour et qui représente pour certaines applications une bonne approximation de l'environnement considéré.

### 2.2.2 Mélanges Linéaires

On peut distinguer trois sous-catégories de mélanges linéaires :

#### Mélanges Linéaires Instantanés (LI) :

Le modèle de mélange linéaire instantané est considéré, dans certains cas comme une bonne approximation de l'environnement réel. Ceci nous a donc amenés à nous focaliser sur ce dernier, qui est présenté dans le cas général, comme suit :

$$x_\ell(t) = \sum_{m=1}^M a_{\ell m} s_m(t) \quad \forall \ell \in \{1 \cdots L\}. \quad (2.1)$$

Dans la suite de ce chapitre, et pour des raisons de simplicité, le modèle présenté ci-dessus concerne des signaux temporels. Il est important de signaler que dans le cas d'une image par exemple, il suffit de remplacer la variable temps notée ici  $t$  par un indice de pixel qu'on notera par la suite  $n$  (ceci est détaillé dans le prochain chapitre).  $a_{\ell m}$  est un coefficient de mélange. Ce dernier est une constante pouvant influencer la contribution de la source  $m$  sur le capteur  $\ell$ .  $s_m(t)$  représente la valeur de la source  $m$  à un instant  $t$ , et  $x_\ell(t)$  représente la valeur de l'observation  $\ell$  obtenue par mélange linéaire instantané des sources au même instant  $t$ .  $L$  et  $M$  sont respectivement le nombre d'observations et de sources présentes dans le mélange considéré.

En considérant l'ensemble des  $L$  observations, on obtient l'écriture matricielle suivante :

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{s}(t), \quad (2.2)$$

où l'ensemble des signaux observés à un instant  $t$  est défini par le vecteur colonne suivant :

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \cdots x_L(t)]^T. \quad (2.3)$$

De même, pour les sources :

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \cdots s_M(t)]^T, \quad (2.4)$$

où  $(.)^T$  représente la transposition d'un vecteur.  $A$  est une matrice inconnue  $L \times M$ , composée des différents coefficients de mélange  $a_{\ell m}$  définis ci-dessus. Elle est appelée “matrice de mélange”.

### Mélanges à Atténuations et Retards :

Dans ce type de mélange, appelé dans les applications audio mélange “anéchoïque”, contrairement au premier mélange (présenté ci-dessus), le temps de propagation entre chaque source et chaque capteur est pris en compte. Ce temps de propagation dépend généralement de la position de chaque émetteur par rapport à chaque capteur (voir figure 2.3). Et ainsi, les signaux observés peuvent être représentés de la manière suivante :

$$x_\ell(t) = \sum_{m=1}^M a_{\ell m} s_m(t - t_{\ell m}), \quad (2.5)$$

avec comme différence par rapport au mélange LI, le terme  $t_{\ell m}$  représentant le décalage temporel entre la source  $m$  et le capteur  $\ell$ . Il est à signaler que dans certains ouvrages, ce type de mélange peut être appelé “mélanges à Atténuations et Retards” (ou AD en anglais, pour “Attenuated and Delayed mixtures”).

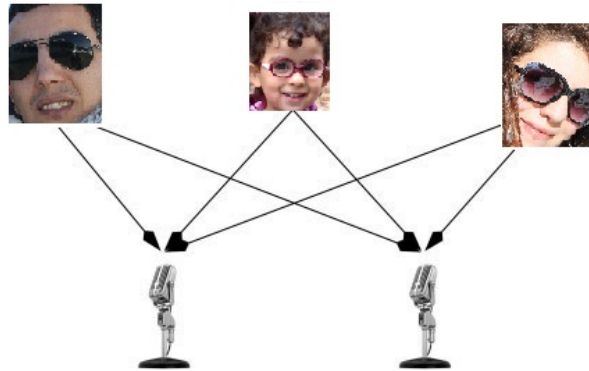


FIGURE 2.3 – Mélanges à Atténuations et Retards : prise en compte du temps de propagation selon la position de chaque émetteur par rapport à chaque capteur (figure adaptée de [28]).

Encore une fois, et comme abordé plus haut, on parle bien du “temps de propagation” car il s’agit de signaux temporels. Lorsque les sources sont des images, les décalages temporels ( $t_{\ell m}$ )

deviennent des translations (décalages) des images.

### Mélanges convolutifs :

Dans ce dernier cas de figure, le mélange prend en compte l'effet du filtrage des sources par la réponse impulsionnelle des filtres inconnus, et ainsi dans le cas de signaux audio, les différentes réflexions de ces mêmes signaux (voir figure 2.4). Les signaux observés peuvent être représentés comme la somme des sources convoluées par les réponses impulsionnelles  $a_{\ell m}(t)$ , comme suit :

$$x_{\ell}(t) = \sum_{m=1}^M a_{\ell m}(t) * s_m(t), \quad (2.6)$$

où  $*$  représente l'opérateur de convolution.

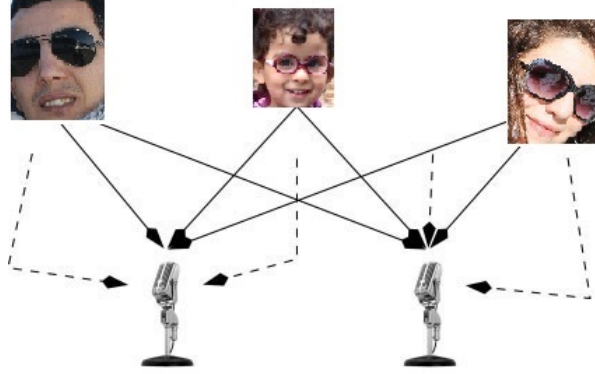


FIGURE 2.4 – Mélanges convolutifs : prise en compte du temps de propagation et des différentes réflexions des signaux (figure adaptée de [28]).

## 2.3 Méthodes classiques de SAS

Dans la suite de ce chapitre, et comme mentionné ci-dessus, nous considérons pour des raisons de simplicité, que le mélange est de type “déterminé”<sup>7</sup> et linéaire instantané. Ainsi, chaque  $x_{\ell}(t)$  peut être représenté comme une combinaison linéaire des sources  $s_m(t)$  présentes dans le mélange (2.2). A ce stade, en reprenant la configuration générale présentée dans la figure 2.2, on peut noter le vecteur des signaux de sortie  $y_m(t)$  (représentant une estimation des signaux sources initiales) comme suit :

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t), \quad (2.7)$$

$C$  étant la matrice  $(M \times M)$  de séparation. Ainsi, en remplaçant (2.2) dans (2.7), on obtient les signaux de sortie  $\mathbf{y}(t)$  tels que :

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{A}\mathbf{s}(t). \quad (2.8)$$

7. Il est à signaler que dans le cas d'applications de télédétection (présentées dans le prochain chapitre), le fait de considérer le mélange comme étant déterminé n'est souvent pas une contrainte supplémentaire, car pour les images hyperspectrales, qui sont sur-déterminées, le nombre de sources est inférieur au nombre d'observations, et il suffit alors d'effectuer une réduction de dimension pour revenir au mélange déterminé.

En supposant que la matrice  $A$  est inversible, l'objectif à atteindre consiste à retrouver  $\mathbf{s}(t)$ , à partir des observations (2.2). Pour ce faire, il faudra idéalement déterminer  $C$  telle que :  $C = A^{-1}$ . En d'autres termes, pour pouvoir extraire nos sources, on est amenés à inverser une matrice qu'on ne connaît pas, ce qui n'est pas aisé à mettre en place sans hypothèses supplémentaires. En pratique on cherche une matrice  $C$  qui est une estimation  $\widehat{A}^{-1}$  de  $A^{-1}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \widehat{A}^{-1} A \mathbf{s}(t), \\ &\approx \mathbf{s}(t) \text{ à quelques indéterminations près (abordées ci-dessous).} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Comme indiqué dans (2.9), l'estimation des sources n'est possible qu'en présence d'indéterminations inévitables dépendant principalement des contraintes imposées aux sources, de la méthode de SAS utilisée, ou bien du type de mélange considéré. Pour ce qui nous concerne, et dans le cas LI, ces indéterminations se traduisent généralement par une permutation de l'ordre de sortie des sources estimées et par des facteurs d'échelle sur ces sources [27].

Dans ce qui suit, nous allons présenter, comme mentionné en introduction, les grandes classes de méthodes de SAS : d'abord l'ACI et les critères les plus connus qui y sont associés et dont une partie nous sera utile dans le cadre de notre travail. Nous évoquerons ensuite les algorithmes les plus connus de NMF, et détaillerons enfin quelques méthodes basées sur l'ACPa en accordant une attention particulière aux méthodes basées sur l'hypothèse de faibles conditions de parcimonie ; ceci toujours dans le but de leur utilisation dans le cadre d'une deuxième étude qui sera présentée dans le Chapitre 5 de ce document.

### 2.3.1 Méthodes basées sur l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI)

L'ACI fait partie des méthodes les plus étudiées en SAS. Dans ce type de méthodes, et de manière générale, les signaux observés sont présentés comme une combinaison linéaire des signaux sources supposés statistiquement indépendants les uns des autres. Mathématiquement, l'indépendance statistique des sources  $s_m(t)$  est équivalente à l'écriture suivante [23] :

$$f_s(s_1(t), \dots, s_M(t)) = \prod_{m=1}^M f_{s_m}(s_m(t)), \quad (2.10)$$

où  $f_s(s_1(t), \dots, s_M(t))$  et  $f_{s_m}(s_m(t))$  représentent respectivement la densité de probabilité conjointe des sources et la densité de probabilité marginale de la source  $s_m(t)$ .

A partir du début des années 1990, période au cours de laquelle P. Comon [29, 30, 31] a formalisé ce principe dans le cadre de mélange LI, de nombreux algorithmes basés sur l'ACI ont été présentés. On peut trouver dans la littérature plusieurs manières de classer ce type de méthodes ; dans la majorité des cas, cela est fait soit en fonction des hypothèses et/ou des contraintes utilisées, ou bien en fonction du modèle de mélange considéré. Pour ce qui nous concerne, et en nous basant sur [27], nous avons décidé de regrouper les principales approches proposées en deux catégories de méthodes :

(1) celles qui sont applicables aux sources indépendantes et identiquement distribuées (iid), avec comme condition additionnelle la nécessité que les sources soient non-gaussiennes (sauf une au plus).

(2) celles qui ne sont applicables qu'aux sources non iid, avec la possibilité que les sources soient gaussiennes. Dans cette deuxième catégorie, exploitant la structure des sources considérées, on peut trouver deux approches différentes. D'une part, il existe les approches basées sur l'autocorrélation des sources, et d'autre part celles basées sur la non-stationnarité des sources.

### Catégorie (1) :

Rappelons d'abord les hypothèses considérées :

- Le mélange est LI, déterminé et la matrice de mélange  $A$  est inversible.
- Les signaux sources sont non-gaussiens et mutuellement statistiquement indépendants.

Avant de parler des critères utilisés dans cette catégorie de méthodes, il est utile de fournir quelques détails relatifs aux pré-traitements appliqués sur les signaux observés, notamment en ce qui concerne l'opération de centrage des données. En effet, le modèle de mélange LI détaillé plus haut est également valable pour les versions centrées des signaux considérés (sources ou observations). Nous signalons dès à présent que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre (sauf indication contraire) les versions centrées<sup>8</sup> des signaux obtenues par simple soustraction de la moyenne de chacun des signaux.

Par ailleurs, dans l'objectif de simplifier le problème considéré, certaines méthodes ont recours aux statistiques d'ordre 2 à un instant  $t$ , ce qui est en pratique faisable, en transférant les signaux observés  $x(t)$  centrés à travers une matrice, que l'on nomme  $M$ , de manière à ce que les signaux observés soient non corrélés et à variance unitaire ou "blanchis". Les signaux en question (observés blanchis), notés  $z(t)$ , sont définis comme suit :

$$\mathbf{z}(t) = M\mathbf{x}(t). \quad (2.11)$$

Ceci est équivalent à satisfaire la condition de blanchiment présentée comme suit :

$$E \{ \mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^T \} = I,$$

où  $E \{ \mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^T \}$  représente la matrice de covariance des observations blanchies ( $I$  étant la matrice identité). L'une des méthodes les plus utilisées consiste à choisir la matrice  $M$  de la manière suivante [23] :

$$M = D^{-1/2}H^T, \quad (2.12)$$

où  $H$  représente une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres unitaires de la matrice de covariance des observations, et  $D$  la matrice diagonale des valeurs propres associées.

Le fait d'imposer à  $M$  cette condition ne constitue pas une solution à notre problème de séparation de sources. Pour pouvoir atteindre cet objectif, et obtenir une solution unique à ce problème (aux indéterminations classiques près), on est obligé dans la plupart des cas, de faire appel à des contraintes plus fortes que la décorrélation, et ainsi utiliser les critères d'indépendance

---

8. La version centrée d'une Variable Aléatoire (VA)  $x$  est la VA  $y$  définie par :

$$y = x - E \{ x \}$$

où  $E \{ . \}$  représente l'espérance mathématique.

(dont les plus connus sont présentés ci-dessous). Ceci étant, nous avons progressé par rapport aux observations initiales (2.2). En effet, d'après l'expression de nos observations blanchies (2.11) et compte tenu de (2.2), on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= M\mathbf{x}(t), \\ &= MAs(t), \\ &= B\mathbf{s}(t). \end{aligned} \tag{2.13}$$

En tenant compte des propriétés de  $\mathbf{z}(t)$  (vérifiant la condition de blanchiment) et de  $\mathbf{s}(t)$ , il est facile de démontrer que  $B$  est "orthogonale" (voir [27] ou bien [23] pour plus de détails). Cette propriété de la matrice  $B$  est considérée comme une avancée intéressante certes (par opposition à la matrice de mélange initiale  $A$ , qui est inconnue), mais pas suffisante pour résoudre notre problème, qui est présenté<sup>9</sup> maintenant de la manière suivante :

$$\mathbf{y}(t) = W\mathbf{z}(t). \tag{2.14}$$

En d'autres termes,  $\mathbf{z}(t)$  est transféré à travers une matrice orthogonale, notée  $W$ .

Par ailleurs, cette étape de blanchiment peut également servir pour comprendre les raisons pour lesquelles on ne considère pas les variables gaussiennes dans ce type de méthodes d'ACI. En effet, si on considère deux signaux aléatoires indépendants et gaussiens, il est présenté dans [23] que les densités de probabilité conjointes de ces signaux sources ainsi que celles des signaux observés blanchis sont identiques. Par conséquent, il n'est pas possible d'estimer la matrice de mélange à partir du mélange de ces sources (observations) ; ceci est lié au fait que les variables gaussiennes décorrélatées sont indépendantes, et donc les informations sur leur indépendance ne vont pas être d'une grande utilité par rapport à ce qui a déjà été réalisé avec un blanchiment des observations. Une illustration graphique de ce phénomène est présentée dans [23] avec plus de détails sur ce sujet.

Nous présentons ci-dessous quelques critères, faisant partie des méthodes les plus connues et utilisées dans la littérature :

#### (a) Méthodes basées sur les "moments ou cumulants" :

Rappels concernant les outils nécessaires pour ce type de méthodes :

- **Le moment (ou "moment non centré")**<sup>10</sup> d'ordre  $n$  d'une Variable Aléatoire (VA)  $x$ , avec  $n$  entier positif ou nul, est défini comme suit [27] :

$$m_n = E\{x^n\}.$$

La fonction caractéristique de cette VA est notée  $\phi_x$ , et est définie comme suit :

$$\phi_x(\omega) = E\{e^{j\omega x}\}, \text{ avec } \omega \in \mathbb{R}.$$

- **Le cumulant** d'ordre  $n$  d'une VA  $x$ , est défini comme suit :

$$\text{cum}_n(x) = (-j)^n \frac{d^n \phi_x(\omega)}{d\omega^n} \Big|_{\omega=0},$$

9. Seulement pour les méthodes concernées par l'étape de blanchiment.

10. Il est à préciser que la version centrée du moment d'ordre 2 représente la variance.



où  $\psi_x(\omega)$  représente la seconde fonction caractéristique, qui est définie par :

$$\psi_x(\omega) = \ln \phi_x(\omega).$$

Pour plus de détails concernant ces outils il est possible de consulter le Chapitre 12 de [27]. Dans le même ouvrage il est également possible de consulter la partie relative aux liens existant entre les cumulants et les moments, celle liée aux propriétés de ces derniers ou bien relative aux propriétés des cumulants d'un vecteur aléatoire (cumulants croisés), qui sont utilisés dans les méthodes abordées ci-dessous.

L'une des premières méthodes de cette catégorie est celle dite de "Hérault-Jutten" [32]. Pour pouvoir séparer les sources supposées être indépendantes les unes des autres, les auteurs utilisent une approche fondée sur un réseau neuronal. Pour atteindre cet objectif, ils proposent de mesurer le degré d'indépendance des sources en se basant sur les "**moments**" d'ordre supérieur ( $>2$ ) des signaux. Dans un autre registre, l'une des premières méthodes basées sur les "**cumulants**", est celle proposée par J.L. Lacoume et P. Ruiz [33]. Cette dernière méthode utilise un système de séparation légèrement différent de celui présenté dans la méthode précédente, et repose sur les propriétés statistiques des cumulants des signaux de sortie du système de séparation, en particulier les cumulants croisés d'ordre quatre. Il est à noter que cette méthode présente quelques limitations liées au critère de séparation utilisé, notamment son application à une classe restreinte de signaux sources (voir [27] ou [34] pour plus de détails). Ceci étant, la démarche proposée dans cette dernière, représente la structure générale adoptée par la plupart des méthodes de la littérature développées par la suite, à savoir :

- définition du type de mélange considéré, permettant ainsi l'identification d'une structure du système de séparation.
- définition d'un critère de séparation (par exemple : "maximisation de la non-gaussianité"),
- mise en place d'un algorithme permettant d'adapter la matrice de séparation, en fonction du critère adopté ci-dessus.

Par ailleurs, afin d'éviter les points faibles des quelques approches citées ci-dessus, d'autres méthodes ont été présentées dans la littérature. En effet, P. Comon a proposé dans ses travaux [29] une méthode (appelée COM2) basée sur la maximisation d'une fonction de coût appelée "fonction de contraste" ou "contraste"<sup>11</sup>, qui est présentée comme étant la somme des carrés des auto-cumulants d'ordre  $r \geq 3$  des signaux de sortie :

$$F_{COM2}(W, y) = \sum_{m=1}^M [\underbrace{cum(y_m(t), \dots, y_m(t))}_{r \text{ arguments}}]^2. \quad (2.15)$$

Il est à remarquer que si l'ordre des autocumulants est fixé à 4, ceci revient à maximiser un critère basé sur le kurtosis non-normalisé (il est possible de consulter [27] pour une présentation plus générale de ce critère). Par ailleurs, la première étape de cette méthode consiste à réaliser un blanchiment des données (comme détaillé plus haut).

Une autre méthode du même type, c-à-d utilisant une fonction de contraste est la méthode présentée par J-F. Cardoso et A. Souloumiac [35]. Celle-ci est très connue sous l'appellation

---

11. En résumé, un contraste est un critère dont la maximisation permet l'extraction des sources considérées dans le mélange (aux indéterminations classiques près). Pour plus de détails à ce sujet, il est possible de consulter le Chapitre 3 de [2] et les références qui y sont citées.

JADE (pour “Joint Approximate Diagonalization of Eigen-matrices”). La structure générale de cette méthode est similaire à celle de P. Comon (présentée ci-dessus). Elles commencent par une étape de blanchiment des observations, puis elles estiment les signaux de sorties (2.14) grâce à une fonction de contraste, qui dans ce cas est présentée comme suit :

$$F_{JADE}(W, y) = \sum_{m,k,l=1}^M [cum(y_m(t), y_m(t), y_k(t), y_l(t))]^2. \quad (2.16)$$

A la différence de la première fonction de contraste (définie ci-dessus), celle de JADE exploite à la fois les auto-cumulants et cumulants croisés, et peut être résumée d’après [35] comme suit :

- Constitution des matrices de cumulants (d’ordre 4) à partir des observations blanchies, et calcul des plus grandes valeurs propres (par ordre croissant) et des matrices propres correspondantes.
- Diagonalisation conjointe des matrices propres calculées ci-dessus, à l’effet de déterminer une matrice unitaire maximisant un critère basé sur les cumulants d’ordre 4 (2.16).
- Estimation de la matrice de séparation à partir de cette matrice unitaire et la matrice de blanchiment.

Il est à préciser que cette dernière méthode est souvent classée comme étant une méthode réalisant de l’ACI basée sur des approches tensorielles (voir par exemple [23]) et ce, en rapport avec la propriété de multi-linéarité des cumulants d’ordre 4. Pour atteindre l’objectif de séparation de sources, ces méthodes exploitent ainsi les propriétés statistiques de ces cumulants en lien avec l’indépendance des sources.

Un peu plus tard, E. Moreau a généralisé dans ses travaux [36, 37] le contraste sur lequel repose l’algorithme JADE, à un ordre quelconque des cumulants supérieur ou égal à 3.

#### (b) Méthodes basées sur le “kurtosis” :

Le critère présenté dans ce paragraphe peut intuitivement être expliqué en utilisant le théorème central limite (également appelé théorème de la limite centrale), présentant la distribution d’une somme de VA indépendantes comme tendant vers une distribution gaussienne (sous certaines conditions)<sup>12</sup>. En d’autres termes, une somme de VA indépendantes a généralement une distribution qui est plus proche de la gaussienne que chacune des VA initiales. Ainsi, conformément aux hypothèses citées précédemment, et en tenant compte du modèle LI présenté ci-dessus (2.2), le principe adopté dans les méthodes basées sur ce critère est de séparer les sources recherchées en imposant aux signaux de sortie d’être le plus non-gaussiens possible. Dans ce type de méthode, ceci est effectué, en maximisant la non-gaussianité des signaux de sortie. Une des mesures les plus utilisées pour la non-gaussianité est l’auto-cumulant normalisé d’ordre 4, plus connu sous l’appellation “kurtosis normalisé”, et défini pour une VA centrée comme suit :

$$\gamma(y) = \frac{E\{y^4\}}{[E\{y^2\}]^2} - 3. \quad (2.17)$$

Dans ce type de méthodes, le système de séparation fournit en sortie une seule source à la fois. On appelle ce type de système “Multi entrée Mono sortie” (ou MISO pour Multiple-Input Single-Output). Dans cette catégorie de méthodes, N. Delfosse et P. Loubaton [38] ont introduit une

<sup>12</sup>. Pour une démonstration mathématique plus rigoureuse, basée sur le théorème de Darmois, il est possible de consulter [29].

approche comportant plusieurs étapes, et utilisant une procédure de “déflation”. Une étape de blanchiment est d’abord réalisée (comme décrit précédemment), nous permettant de représenter le premier signal estimé en fonction des signaux blanchis comme suit :

$$y(t) = \mathbf{w}^T \mathbf{z}(t). \quad (2.18)$$

L’objectif de cette méthode est d’adapter le vecteur  $\mathbf{w}$  soumis à la contrainte suivante :

$$\|\mathbf{w}\| = 1, \quad (2.19)$$

dans le but d’obtenir un premier signal de sortie censé être égal à un des signaux sources initiaux (aux indéterminations près). Le vecteur  $\mathbf{w}$  est obtenu par maximisation de la valeur absolue du kurtosis de  $y(t)$  en utilisant un algorithme de type gradient. Enfin cette procédure est reconduite, après avoir soustrait de chaque observation le signal source obtenu précédemment, jusqu’à extraction de l’ensemble des signaux sources présents dans le mélange considéré.

L’inconvénient principal des méthodes utilisant ce type d’algorithme, est leur dépendance par rapport au gain d’apprentissage utilisé, pouvant entraîner dans certains cas une divergence de l’algorithme. On peut également citer l’importance du coup calculatoire engendré. Une solution intéressante à ces problèmes a été proposée par A. Hyvarinen et E. Oja qui ont introduit un algorithme de type point fixe [39]. Dans la version de base de cette dernière approche, l’estimation de chacune des sources recherchées est réalisée de manière itérative, en effectuant le couple d’opérations suivantes :

- Mise à jour du vecteur  $\mathbf{w}$  suivant la règle suivante :

$$\mathbf{w} = E \{ \mathbf{z}(\mathbf{w}^T \mathbf{z})^3 \} - 3\mathbf{w}. \quad (2.20)$$

- Normalisation de  $\mathbf{w}$  comme suit :

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}. \quad (2.21)$$

L’algorithme présenté ci-dessus est appelé “FastICA”, en raison notamment de sa rapidité de convergence. L’autre avantage de ce dernier est sa facilité d’utilisation liée au fait qu’il n’est pas nécessaire de choisir un gain d’apprentissage ni d’autres paramètres d’ajustement. Ceci étant, dans certains cas, le kurtosis utilisé ci-dessus peut être sensible aux valeurs extrêmes. Pour cela, une autre mesure de la gaussianité, appelée “néguentropie” a été proposée (voir par exemple [23] ou [27] pour plus de détails). Cette mesure, basée sur la théorie de l’information, est définie (pour une VA) comme suit :

$$J(y) = h(y_{gauss}) - h(y),$$

où  $h(y)$  représente l’entropie différentielle, et  $y_{gauss}$  est une VA gaussienne, centrée et de même variance que  $y$ . La néguentropie est une version normalisée de l’entropie différentielle; grâce aux propriétés de celle-ci, la néguentropie est toujours non-négative et ne s’annule que pour les variables suivant une distribution gaussienne. Il est important de signaler que cette mesure, considérée comme étant l’une des mesures de non-gaussianité les plus utilisées après le kurtosis, a été initialement proposée par P. Comon [29]. L’approche classique d’estimation de cette mesure repose sur les cumulants d’ordre supérieur ( $> 2$ ).

En pratique il est plus simple d’utiliser l’approximation suivante de la néguentropie [23] :

$$J(y) \approx \frac{1}{12} E \{ y^3 \}^2 + \frac{1}{48} kurt(y)^2, \quad (2.22)$$

où  $kurt(y)$  représente le kurtosis non normalisé de  $y$ , qui est défini, pour une VA centrée, comme suit :

$$kurt(y) = E\{y^4\} - 3(E\{y^2\})^2. \quad (2.23)$$

Une autre méthode d'approximation plus robuste que celle présentée en (2.22) a été proposée dans [23], et consiste à remplacer  $y^3$  et  $y^4$  par des fonctions non-quadratiques. Pour ce type de mesure de la non-gaussianité, là aussi on peut trouver comme pour le cas précédent, des algorithmes efficaces de type point fixe.

Enfin, et après avoir présenté les différentes mesures de non gaussianité (kurtosis ou néguentropie), nous détaillons ci-dessous une approche intéressante permettant l'estimation de toutes les sources en même temps [23]. Dans ce cas, au lieu d'utiliser les vecteurs  $\mathbf{w}_i$ , on utilise une matrice  $W$  contenant l'ensemble des  $\mathbf{w}_i$ . Ceci est effectué de la manière suivante :

- (1) Etape de blanchiment,
- (2) Définition du nombre de sources à estimer,
- (3) Initialisation (e.g. aléatoire) des  $\mathbf{w}_i$  avec  $i \in \{1, \dots, M\}$ ,
- (4) Pour chaque vecteur  $\mathbf{w}_i$  (en parallèle), effectuer une itération de l'algorithme de base (e.g. règle de mise à jour (2.20)),
- (5) Orthogonalisation symétrique de la matrice  $W = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M)^T$ , suivant la règle :

$$W \leftarrow (WW^T)^{-1/2}W. \quad (2.24)$$

- (6) Revenir au 4<sup>ème</sup> point si il n'y a pas convergence.

Cette approche, appelée FastICA symétrique, présente l'avantage de fournir l'ensemble des sources en même temps, à l'inverse de l'approche dite déflationnaire [23], qui elle fournit les sources de manière séquentielle induisant parfois des erreurs d'estimation liées à la propagation des erreurs résiduelles.

Ci-dessus nous avons présenté deux versions d'une méthode parmi celles relatives à la maximisation de la non-gaussianité ainsi que les algorithmes les plus connus et utilisés dans la littérature. Il en a été de même pour les méthodes fondées sur les moments et cumulants (par exemple COM2 et JADE). Il va sans dire que l'ensemble des méthodes ACI développées et utilisées depuis les années 80 ne se réduit pas aux méthodes citées ci-dessus. Cette section vise à mettre en avant celles qui nous seront les plus utiles pour la suite, dans une des méthodes proposées dans le cadre de cette thèse, qui sera présentée dans le Chapitre 4. Pour une vision globale de l'ensemble des méthodes d'ACI, il est possible de consulter [27, 26, 23] et les références qui y sont citées. Dans ces derniers, les méthodes que nous avons présentées, certaines de leurs extensions, et d'autres tout aussi importantes que les premières mais non citées ici, sont présentées en détail. On peut citer à titre d'exemple les méthodes du Maximum de Vraisemblance (MV) ou celles fondées sur la minimisation de l'information mutuelle. Dans cette classe de méthodes on peut citer celle introduite par M. Gaeta et J.L. Lacoume [40], ou bien celle proposée par D.T. Pham et P. Garat [41], ou bien encore la méthode proposée par A.J. Bell et T.J. Sejnowski [42].

### Catégorie (2) :

Quant à la deuxième catégorie de méthodes, en l'occurrence celles basées sur la structure des signaux, nous nous limiterons comme ci-dessus à ne citer que les méthodes qui y sont les plus connues, à savoir, celles fondées sur : (a) l'autocorrélation des sources, et celles fondées sur (b) la non-stationnarité des sources.

Pour ce qui concerne (a), on peut citer à titre d'exemple la méthode proposée par L. Tong et al. [43] appelée "AMUSE" (pour "Algorithm for Multiple Unknown Signals Extraction") ainsi que celle proposée par A. Belouchrani et al. [44], appelée "SOBI" (pour "Second-Order Blind Identification"). Quant à (b), on peut citer l'approche présentée par A. Soudoumiac [45], ou bien celle présentée par D-T. Pham et J-F. Cardoso [46].

### 2.3.2 Méthodes basées sur la Factorisation en Matrices Non-négatives (NMF)

Dans cette section, nous présentons une alternative intéressante par rapport à la classe de méthodes présentées ci-dessus, basées sur l'indépendance statistique des sources. Cette alternative consiste à exploiter la non-négativité (ou positivité) des données. En d'autres termes, les observations, les sources et les coefficients de mélange ont des valeurs supérieures ou égales à zéro.

En effet, lorsqu'il s'agit de grandeurs physiques positives, comme par exemple les spectres de réflectance utilisés dans les applications de télédétection, il est nécessaire de pouvoir interpréter les résultats obtenus après étude de ce type de données. Ainsi, les méthodes basées sur la non-négativité sont plus adaptées que celles présentées ci-dessus, qui donnent en sortie des résultats pouvant contenir des valeurs négatives, et par conséquent difficilement interprétables, voire impossibles. Par ailleurs, dans la majorité des cas les sources ne sont pas indépendantes si bien que les méthodes basées sur l'ACI ne sont pas utilisables.

Historiquement, les méthodes basées sur la non-négativité ont été introduites dans le milieu des années 1990 par P. Paatero et U. Tapper ([47, 48] et les références qui y sont citées) sous l'appellation de "Factorisation en Matrices Positives" (FMP ou "PMF" pour "Positive Matrix Factorization"). Puis un peu plus tard, vers la fin des années 90 (début 2000), ces méthodes ont été popularisées par D.D. Lee et H.S. Seung [49, 50] sous l'appellation de "Factorisation en Matrices Non-négatives" (NMF). Depuis cette période, plusieurs algorithmes basés sur ce principe ont été proposés. De manière générale, ces derniers ont pour objectif de retrouver à partir d'une matrice d'observation composée d'éléments positifs, deux autres matrices  $\hat{A}$  et  $\hat{S}$ , également composées d'éléments positifs, de manière à ce que :

$$X \approx \hat{A}\hat{S}, \quad (2.25)$$

avec  $X \in \mathbb{R}_+^{L \times N}$ ,  $\hat{A} \in \mathbb{R}_+^{L \times M}$ ,  $\hat{S} \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$  et  $M < \min(L, N)$ .

Dans la majorité des méthodes existantes, la factorisation est effectuée en minimisant une fonction objective (ou fonction coût) grâce à une mise à jour appliquée aux composantes estimées  $\hat{A}$  et  $\hat{S}$ . En effet, dans la version la plus connue de la NMF, on peut citer deux algorithmes qui ont été présentés par D.D. Lee et H.S. Seung [50]. Le premier consiste à minimiser une fonction objective représentée par la norme de Frobenius de la différence entre  $X$  et le produit des matrices  $\hat{A}$  et  $\hat{S}$ . Celle-ci est définie comme suit :

$$D_F(X, \hat{A}\hat{S}) = \frac{1}{2} \left\| X - \hat{A}\hat{S} \right\|_F^2. \quad (2.26)$$

Pour ce faire, les auteurs ont proposé une règle de mise à jour multiplicative, définie par :

$$\hat{S}_{mn} \leftarrow \hat{S}_{mn} \frac{(\hat{A}^T X)_{mn}}{(\hat{A}^T \hat{A} \hat{S})_{mn}}, \quad (2.27)$$

$$\hat{A}_{\ell m} \leftarrow \hat{A}_{\ell m} \frac{(X \hat{S}^T)_{\ell m}}{(\hat{A} \hat{S} \hat{S}^T)_{\ell m}}. \quad (2.28)$$

Toujours sous la contrainte de non-négativité, le deuxième algorithme de Lee et Seung [50] consiste à minimiser la divergence de Kullback-Leibler entre  $X$  et le produit des matrices  $\hat{A}$  et  $\hat{S}$ . Cette dernière est définie par :

$$D_{KL}(X, \hat{A}\hat{S}) = \sum_{\ell, n} \left\{ X_{\ell n} \log \left[ \frac{X_{\ell n}}{(\hat{A}\hat{S})_{\ell n}} \right] - X_{\ell n} + (\hat{A}\hat{S})_{\ell n} \right\}. \quad (2.29)$$

Les règles de mise à jour multiplicatives proposées pour minimiser cette divergence sont présentées comme suit [25] :

$$\hat{S}_{mn} \leftarrow \hat{S}_{mn} \frac{\sum_{\ell=1}^L \hat{A}_{\ell m} (X_{\ell n} / (\hat{A}\hat{S})_{\ell n})}{\sum_{\ell=1}^L \hat{A}_{\ell m}}, \quad (2.30)$$

$$\hat{A}_{\ell m} \leftarrow \hat{A}_{\ell m} \frac{\sum_{n=1}^N \hat{S}_{mn} (X_{\ell n} / (\hat{A}\hat{S})_{\ell n})}{\sum_{n=1}^N \hat{S}_{mn}}, \quad (2.31)$$

Les règles de mise à jour multiplicatives présentées ci-dessus (dont l'écriture matricielle est disponible avec plus de détails dans [25]) ont été largement utilisées dans plusieurs applications en raison notamment de leur facilité d'implémentation. Par ailleurs, on peut trouver dans la littérature plusieurs autres manières de minimiser les fonctions présentées ci-dessus. Il a été présenté dans [51, 52] des méthodes de gradient projeté. On peut également citer les méthodes des moindres carrés alternés (ALS pour Alternating Least Squares) [53, 54], ou bien encore la méthode Quasi-Newton [55, 56]. Pour plus de détails concernant ces méthodes, il est possible de consulter [57] présentant un résumé intéressant, ou bien [25] de manière plus générale.

Le problème le plus important qui se pose pour ce type de méthodes, réside dans la non-unicité de cette factorisation. En effet, en ne considérant que la non-négativité de  $\hat{A}$  et  $\hat{S}$ , on ne peut résoudre notre problème de factorisation. Ceci peut facilement être remarqué en considérant une matrice inversible (pas nécessairement non-négative)  $D$ , telle que :

$$X \approx \hat{A} D D^{-1} \hat{S},$$

et que  $\hat{A}D = \hat{A}^*$  et  $D^{-1}\hat{S} = \hat{S}^*$  soient non-négatives [25]. Ceci est équivalent à la solution présentée dans (2.25) :

$$X \approx \hat{A}^* \hat{S}^*. \quad (2.32)$$

Par conséquent, (2.32) démontre clairement l'existence d'un nombre infini de factorisations de la matrice  $X$ . Une étude plus détaillée de l'unicité de la factorisation est présentée par S. Mousaoui et al. [58], ou bien également par D. Donoho et al. [59] qui présentent une interprétation géométrique de la NMF. Dans ce dernier article, la NMF est définie comme étant la procédure permettant l'identification d'un cône appartenant à l'orthant positif englobant le nuage de points des données observées. Là aussi, il est possible de voir que le cône identifié n'est pas toujours unique sans contrainte supplémentaire, comme présenté dans la figure 2.5.

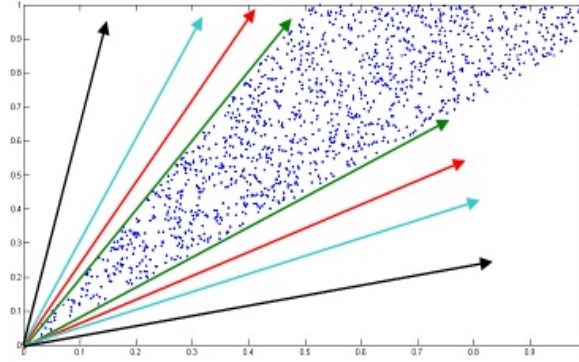


FIGURE 2.5 – Différents cônes englobant les composantes d’un vecteur de données observées [60]

Par ailleurs, et en raison de la non-convexité des fonctions objectives (présentées ci-dessus) vis-à-vis des matrices  $\hat{A}$  et  $\hat{S}$  simultanément - c.à.d. qu’elles sont seulement convexes vis-à-vis de  $\hat{A}$  (à  $\hat{S}$  fixée) ou bien vis-à-vis de  $\hat{S}$  (à  $\hat{A}$  fixée) - les méthodes présentées convergent donc vers un minimum local [50]. Ceci implique que le point de convergence de ce type d’algorithmes dépend fortement de l’initialisation utilisée en entrée de l’algorithme, et ainsi une initialisation aléatoire d’un algorithme NMF peut conduire à de mauvais résultats. Une des solutions proposées à ce problème consiste à réaliser une initialisation multiple, et choisir l’initialisation qui donne la fonction de coût la plus faible (quelques algorithmes effectuant ce type d’initialisation sont présentés dans [25]). On peut également trouver dans la littérature d’autres méthodes d’initialisation comme par exemple [61] proposant une comparaison entre plusieurs approches d’initialisation, ou bien [62] utilisant une initialisation basée sur des méthodes de classification, ou bien encore [63] utilisant des algorithmes génétiques (voir également les références dans les articles cités).

Toujours dans l’objectif d’éviter ces problèmes, d’autres méthodes utilisent des hypothèses supplémentaires sur les sources et/ou les coefficients de mélange et ce, en fonction des informations a priori que l’on a sur ceux-ci. En pratique, on rajoute au niveau des fonctions objectives présentées ci-dessus des termes de régularisation ayant pour objectif de prendre en compte ces informations a priori [64]. Dans le cas de la distance euclidienne par exemple, la fonction objective devant être minimisée, est présentée sous la forme suivante :

$$\min_{\hat{A}, \hat{S}} \left\{ \left\| X - \hat{A}\hat{S} \right\|_F^2 + \alpha J_1(\hat{A}) + \beta J_2(\hat{S}) \right\}, \quad (2.33)$$

où les fonctions  $J_1(\hat{A})$  et  $J_2(\hat{S})$  sont des termes de pénalisation utilisés pour contraindre la solution à respecter les a priori considérés.  $\alpha$  et  $\beta$  sont les paramètres de régularisation correspondants. Différents termes de pénalisation ont été utilisés dans la littérature, ceci en fonction de l’application considérée et bien sûr en fonction des informations disponibles sur les données utilisées. On peut citer par exemple les travaux de P. Hoyer [65] qui présente une solution basée sur la “parcimonie” des sources (voir dans le paragraphe suivant, la définition de la parcimonie). On peut aussi consulter les travaux de V. P. Pauca et al. [66] ou bien ceux de K. Drakakis et al. [67] utilisant des contraintes de lissage (ou “smoothness”, en anglais). Pour plus de détails concernant ces contraintes, d’autres types de contraintes imposées ou bien d’autres fonctions objectives pouvant être appliquées (en plus de la distance euclidienne et de la divergence Kullback-Leibler),

on peut consulter [25] qui est un ouvrage dédié à la NMF et ses possibles extensions.

### 2.3.3 Méthodes basées sur l'Analyse en Composantes Parcimonieuses (ACPa)

Ci-dessus, nous avons présenté deux grandes classes de méthodes de SAS. On a commencé par présenter les premières méthodes de SAS qui sont basées sur l'indépendance statistique des sources, puis celles basées sur la non-négativité des sources et des coefficients de mélange. Depuis maintenant une décennie (voire un peu plus), une nouvelle classe de méthodes basées sur la parcimonie des sources a fait l'objet d'un grand intérêt dans la communauté du traitement des signaux et des images. Ces méthodes sont appelées Analyse en Composantes Parcimonieuses (ACPa ou "SCA" en anglais, pour Sparse Component Analysis).

De manière générale, *un signal est dit parcimonieux si la plupart de ses composantes ont une amplitude nulle (ou du moins, en pratique, une amplitude très faible par rapport aux composantes de ce signal ayant les amplitudes les plus élevées)* [27].

Plus précisément, l'hypothèse de parcimonie des sources est liée au domaine de représentation du signal considéré. Une bonne illustration de ce principe est présentée dans le Chapitre 10 de [26] et qu'on reprend dans la figure 2.6. Le mélange présenté dans cet exemple est de type sous-déterminé (deux observations et trois sources). Reprenons le modèle de mélange LI (dans le domaine temporel) présenté dans (2.2) et qu'on rappelle ici :

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{s}(t). \quad (2.34)$$

On remarque clairement dans la partie située en haut (à gauche) de la figure 2.6 que les sources ont un support temporel disjoint, permettant ainsi d'avoir des tranches temporelles où à chaque instant  $t$  (appartenant à cette tranche), il existe une source active alors que les autres sources sont nulles (ou bien négligeables). Conformément à (2.34), ceci induit un nuage de points sur l'ensemble des échantillons représentés par le couple de valeurs  $(x_1(t), x_2(t))$ , illustré en bas (à gauche) de la figure 2.6, dans laquelle on peut distinguer les directions des colonnes de la matrice de mélange.

En général, l'objectif de ce type de méthodes est d'abord l'identification de la matrice de mélange, grâce à des algorithmes de catégorisation (ou "clustering" en anglais), puis dans une deuxième phase, l'extraction des sources correspondantes (aux indéterminations de permutation et d'échelle près) à l'aide de cette dernière matrice de mélange. Ces deux étapes étant réalisées en se basant principalement sur l'hypothèse de parcimonie des sources.

L'approche à parcimonie présentée ci-dessus peut être directement appliquée sur les signaux observés, c.à.d. dans le domaine temporel (qui est utilisé dans de nombreuses applications). Ceci étant, quand les sources ne présentent pas un support temporel (ou spatial) disjoint, comme par exemple un signal de parole continue ou bien comme les signaux musicaux représentés dans la partie en haut (au milieu) de la figure 2.6, qui ne sont pas parcimonieux dans le domaine temporel, les directions des colonnes de la matrice de mélange ne peuvent être distinguées (voir la partie en bas (au milieu) de la figure 2.6). Pour pouvoir exploiter la parcimonie des sources, d'autres méthodes utilisent un autre domaine de représentation du signal, permettant ainsi l'identification des directions des colonnes de la matrice de mélange, comme illustré en bas (à droite) de la figure 2.6.



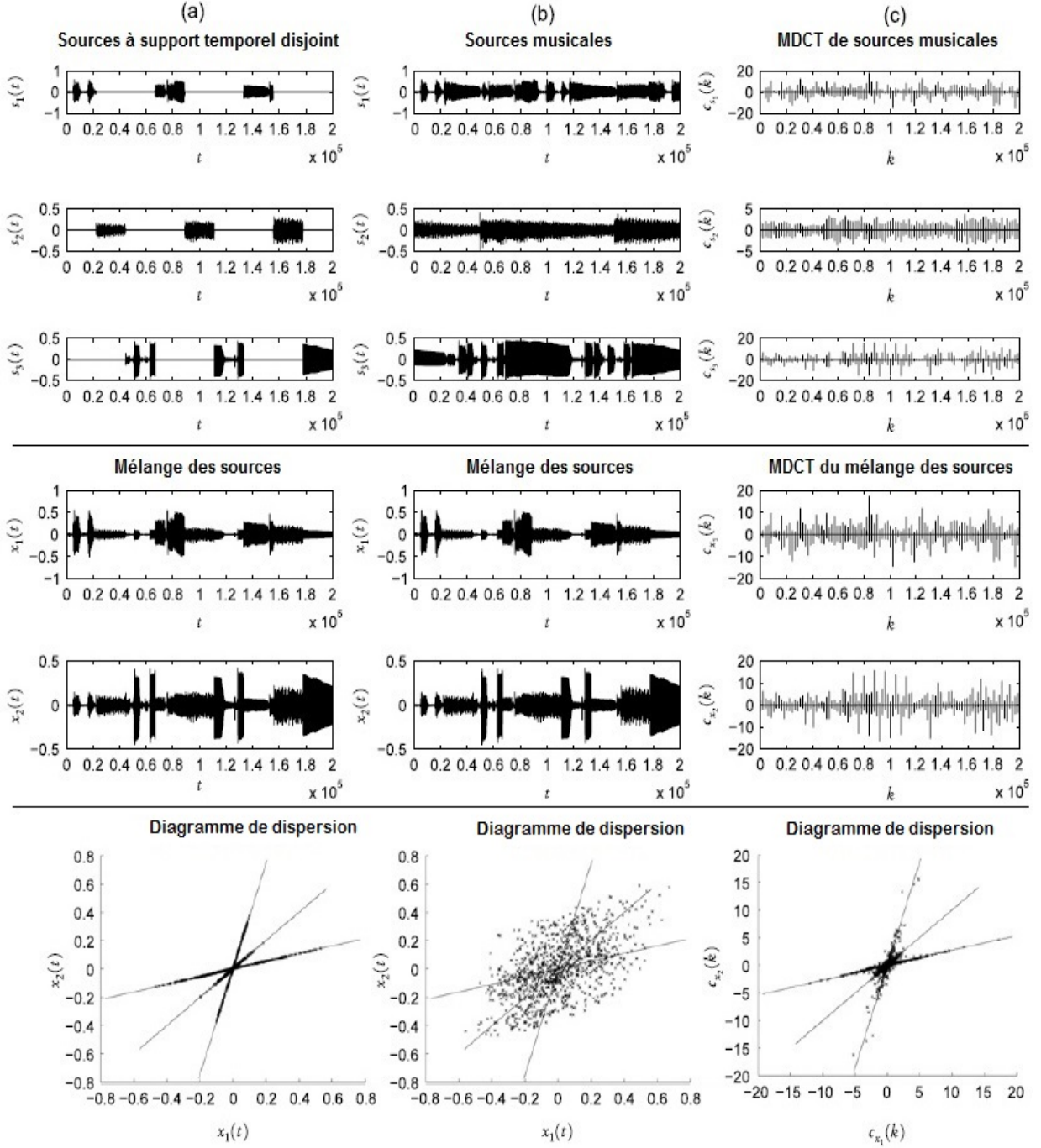


FIGURE 2.6 – Principe géométrique de la séparation de sources par la parcimonie [26]. Dans la partie (c) de la figure, la transformation utilisée est la MDCT qui représente la “Transformée en Cosinus Discrète Modifiée” (ou en anglais : “the Modified Discrete Cosine Transform”).

Dans ce cas de figure, on peut alors reprendre le modèle (2.34) par exemple dans le domaine temps-fréquence (TF), et avoir grâce à la linéarité de certaines fonctions, comme par exemple la Transformation de Fourier à Court Terme<sup>13</sup> (TFCT) [69], ce qui suit :

$$\mathbf{x}(t, \omega) = A\mathbf{s}(t, \omega), \quad (2.35)$$

où  $\mathbf{x}(t, \omega)$  et  $\mathbf{s}(t, \omega)$  représentent respectivement la TFCT des observations  $\mathbf{x}(t)$  et des sources  $\mathbf{s}(t)$ . Le mélange des signaux dans le domaine transformé (TF) reste donc de nature linéaire et instantanée. A partir de cette nouvelle représentation des signaux considérés (TF) on peut maintenant identifier, de la même manière que pour le cas temporel cité un peu plus haut, la matrice de mélange  $A$ , puis extraire les coefficients TF des sources à partir de la matrice estimée  $A$ . Dans le cas où le mélange est de type (sur)déterminé ( $M \leq L$ ), les sources peuvent être estimées par simple inversion de la matrice de mélange ou bien grâce à une pseudo-inverse de la même matrice de mélange, ce qui n'est bien sûr pas le cas des mélanges sous-déterminés. Dans ce dernier cas de figure, nous citerons par la suite plusieurs méthodes pouvant effectuer une estimation totale (ou partielle) des sources en se basant comme cité ci-dessus, sur l'hypothèse de parcimonie des sources. Une fois les transformées des sources estimées, une dernière étape sera nécessaire pour retrouver les sources dans le domaine de représentation initial (par transformée inverse).

En ce qui concerne ce point particulier de reconstruction des sources (dans le cas sous-déterminé), on peut trouver dans la littérature un nombre important de contributions traitant de ce sujet. Ces travaux concernent en particulier la reconstruction des sources par minimisation d'un critère sous contrainte. Les critères les plus utilisés concernent la norme  $\ell_q$  qui est, pour  $q \in [0, 1]$ , définie par [70] :

(1) Pour  $q = 0$  :

$$\|u\|_0 = \sum_{|s_i| \neq 0} |s_i|^0. \quad (2.36)$$

(2) Pour  $q \in ]0, 1]$  :

$$\|u\|_q = \left( \sum_i |s_i|^q \right)^{1/q}. \quad (2.37)$$

Les sources estimées les plus parcimonieuses, au sens de la norme  $\ell_q$ , sont les signaux qui vérifient alors la condition suivante :

$$\underbrace{\min}_s \|s\|_q, \text{ sous la contrainte } A\mathbf{s} = \mathbf{x}. \quad (2.38)$$

De toute évidence, d'autres méthodes basées sur la parcimonie, similaires à celles qu'on a brièvement introduites ci-dessus (avec beaucoup plus de détails concernant le choix de la norme  $\ell_q$  ou bien d'autres représentations parcimonieuses utilisées) sont disponibles dans la littérature, et en particulier dans le Chapitre 10 de [26] ainsi que les références qui y sont citées.

13. Il est à préciser qu'il est possible d'utiliser d'autres domaines de représentation comme par exemple le domaine temps-échelle (voir [68] et les références qui y sont citées). On peut dans ce cas, utiliser la Transformée en ondelettes continue (ou "CWT" en anglais, pour Continuous Wavelet Transform). Par ailleurs, dans l'exemple présenté en figure 2.6, la fonction utilisée est la "Transformée en Cosinus Discrète Modifiée" (ou "MDCT" pour "Modified Discrete Cosine Transform", en anglais).

Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux types de méthodes basées sur la parcimonie des sources au sens “conjointe”, et ainsi nous avons volontairement orienté cette section vers les catégories de méthodes exploitant les informations obtenues à partir du nombre de sources actives (c-à-d différentes de zéro) dans chaque point ou région du domaine de représentation considéré (temporel, TF, ou autre). Plusieurs manières de classifier les méthodes ACPa peuvent être trouvées dans la littérature. En rapport avec nos besoins, nous avons donc choisi de classifier ces méthodes en trois catégories et ce, de la manière suivante :

### (1) Méthodes basées sur l’hypothèse de fortes conditions de parcimonie :

Un algorithme connu dans cette catégorie de méthodes est celui présenté par S. Rickard et al. [71, 72, 8] et appelé “DUET” (pour “Degenerate Unmixing Estimation Technique”, en anglais). Dans la version initiale de cet algorithme [71], qui a été développé pour la séparation de mélanges à atténuations et retards (contenant deux capteurs et  $M$  sources avec  $M \geq 2$ ), les auteurs se basent sur l’hypothèse principale d’existence de points TF mono-sources, c-à-d qu’en chaque point du domaine considéré, il existe une seule source active. Le modèle utilisé est représenté sous la forme suivante :

$$x_1(t) = \sum_{m=1}^M s_m(t), \quad (2.39)$$

$$x_2(t) = \sum_{m=1}^M a_m s_m(t - \delta_m), \quad (2.40)$$

où  $\delta_m$  représente le décalage temporel. La version TF du modèle considéré est représentée comme suit :

$$\begin{bmatrix} x_1(t, \omega) \\ x_2(t, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 e^{-i\omega\delta_1} & \cdots & a_M e^{-i\omega\delta_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t, \omega) \\ \vdots \\ s_M(t, \omega) \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

et ainsi, en se basant sur l’hypothèse sus-citée qui consiste à supposer que les sources ont un support totalement disjoint (cette condition est appelée WDO pour “W-Disjoint-Orthogonality”), l’Equation (2.41) peut selon les auteurs, s’écrire de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1(t, \omega) \\ x_2(t, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_m e^{-i\omega\delta_m} \end{bmatrix} s_m(t, \omega). \quad (2.42)$$

Ceci permet le calcul des paramètres d’amplitude et de retard associés à une seule source, comme suit :

$$(a_m, \delta_m) = \left( \left| \frac{x_2(t, \omega)}{x_1(t, \omega)} \right|, -\frac{1}{\omega} \angle \left( \frac{x_2(t, \omega)}{x_1(t, \omega)} \right) \right), \quad (2.43)$$

où  $\angle(\cdot)$  représente la phase. On peut résumer les étapes majeures de cet algorithme de la manière suivante :

- Calcul de la TFCT des observations considérées.
- Calcul à partir de (2.43) des paramètres d’amplitude et de retard associés à chacun des points TF. Utilisation d’un algorithme de classification pour rassembler, en ces derniers points, les valeurs de la première observation dans le domaine considéré, censées être égales aux valeurs de la source active identifiée (cette procédure est effectuée pour chacune des sources).

- Combinaison de ces valeurs avec des valeurs nulles correspondant aux points TF où ce signal source est inactif, permettant ainsi l’obtention de la représentation complète de ce signal source (cette procédure est effectuée pour chacune des sources).
- Enfin, réalisation d’une TFCT inverse afin de retrouver la version temporelle des signaux sources considérés.

D’une part, cette méthode est simple à mettre en place, d’autre part elle présente l’avantage d’être applicable dans le cas de mélange sous-déterminés ; et elle permet une séparation complète des sources considérées (aux indéterminations habituelles de permutation et d’échelle près). Ceci étant, l’inconvénient majeur de cette dernière est lié à l’hypothèse de fortes conditions de parcimonie considérée ci-dessus. Cette condition de WDO a été légèrement relaxée et a donné lieu à une WDO approximative (en particulier pour les signaux de parole) présentée plus en détail dans [72, 8].

Dans le même objectif de réduire les contraintes imposées par la WDO, plusieurs extensions de DUET ont été présentées. On peut citer dans ce sens les travaux de J. Rosca et al. [73] dans lesquels ils présentent une généralisation de la condition de WDO à  $(L-1)$  sources, où  $L$  est le nombre d’observations (cette condition est également appelée “generalized W-disjoint orthogonality”). On peut également citer les travaux présentés dans [74] introduisant une analyse par maximum de vraisemblance (qui est également présentée dans [8]). Par ailleurs, on peut également citer les travaux de S. Rickard et al. qui ont proposé une méthode combinant les techniques d’estimation des directions d’arrivée (DOA pour “Direction Of Arrival”) de la méthode ESPRIT présentée dans [75], avec la méthode DUET. Cette méthode est appelée “DESPRIT”, et permet la prise en compte d’un plus grand nombre d’observations ( $> 2$ ) que DUET avec en même temps une version plus relâchée de la condition de WDO [76]. Dans le même contexte, voir aussi les méthodes proposées par A. Aïssa-El-Bey et al [77, 78], ou bien la proposition d’une amélioration de ces dernières qui a été présentée dans [79], et qui au final a donné lieu aux travaux présentés par S.M. Aziz Sbai et al. [80].

Une autre approche qu’on peut associer également à cette catégorie de méthodes, car imposant en pratique des conditions proches de la WDO, est celle proposée par P. Bofill et M. Zibulevsky [81]. Cette dernière approche développée dans le cadre du mélange LI sous-déterminé, consiste à estimer la matrice de mélange en se basant sur le nuage de points des observations transformées dans le domaine TF. L’estimation des directions des colonnes de la matrice du mélange est effectuée en maximisant une fonction dite “potentielle”. Une fois les colonnes de la matrice de mélange estimées, l’extraction des sources est effectuée via une minimisation de norme  $\ell_1$  sous contrainte. Il est à noter par ailleurs, qu’une extension de cette méthode au mélange AD à été proposée dans [82].

## (2) Méthodes basées sur l’hypothèse de faibles conditions de parcimonie :

Un intérêt particulier est accordé à cette catégorie de méthodes qui sont appelées dans [83] “méthodes quasi-non-parcimonieuses”. Celles-ci seront donc plus détaillées que les autres catégories, car elles constituent le socle sur lequel repose une partie de notre travail. On peut citer dans cette catégorie de méthodes, plusieurs approches développées dans notre groupe par Y. Deville et al. parmi lesquelles on peut citer TiFROM (pour “Time-Frequency Ratios Of Mixtures”) [9] développée pour des mélanges LI, ainsi que son extension au type de mélange AD [84], et TiF-CORR (pour “TIme-Frequency CORRelation-based BSS”) [85, 11]. L’hypothèse principale de ces méthodes (exploitant le domaine TF) est l’existence, non pas de points mono-source, mais

plutôt de “région” ou “zone” mono-source pour chacune des sources présentes dans le mélange considéré. Les versions temporelles de ces méthodes sont basées sur le même principe et sont également détaillées dans [9, 11]. Pour comprendre un peu mieux le principe de ces méthodes, nous avons choisi de présenter l’une d’entre elles, par exemple la version de base de TiFCORR et nous aborderons, par la même occasion, quelques critères et propriétés utilisés par TiFROM. La structure générale de ce type de méthodes est la suivante :

- Calcul de la TFCT des observations considérées.
- Détection à partir des observations, de toutes les zones d’analyse “mono-sources” disponibles.
- Identification des colonnes de la matrice de mélange à partir de chacune des zones mono-sources détectées dans l’étape précédente.
- Extraction des sources.

La **première** étape consiste à transformer les signaux observés dans le domaine TF. En considérant le cas de mélange LI déterminé ( $L = M$ ) présenté dans (2.1) et qu’on rappelle ici :

$$x_\ell(t) = \sum_{m=1}^M a_{\ell m} s_m(t) \quad \forall \ell \in \{1 \cdots L\}, \quad (2.44)$$

la transformée TF (obtenue dans ce cas de figure avec une TFCT) des observations peut donc s’écrire conformément à (2.35), comme suit :

$$x_\ell(t, \omega) = \sum_{m=1}^M a_{\ell m} s_m(t, \omega) \quad \forall \ell \in \{1 \cdots L\}. \quad (2.45)$$

Dans la **deuxième** étape, les auteurs proposent plusieurs variantes à l’effet de détecter à partir des observations présentées ci-dessus (2.45), toutes les zones mono-sources, c-à-d toutes les zones où seule une source est active. Pour ce faire, il sera nécessaire de parcourir tout le plan TF en utilisant une zone d’analyse, qu’on note  $\psi$ , constituée d’un très petit nombre de points TF adjacents. Pour chacune de ces zones d’analyse, les auteurs proposent de calculer les “coefficients d’intercorrélation” entre les signaux observés, qui sont définis comme suit :

$$\rho_{x_1 x_\ell}(\psi) = \frac{C_{x_1 x_\ell}(\psi)}{\sqrt{C_{x_1 x_1}(\psi) \times C_{x_\ell x_\ell}(\psi)}} \quad \forall \ell \in \{2 \cdots L\}, \quad (2.46)$$

où  $C_{x_i x_j}(\psi)$  représente la covariance des transformées TF des signaux observés  $x_i$  et  $x_j$  sur la zone d’analyse  $\psi$ .

Avant de détailler les propriétés sur lesquelles reposent les méthodes citées ci-dessus, il est nécessaire de poser quelques hypothèses :

- Pour chacune des sources, il existe au moins une zone d’analyse dans laquelle cette source est active.
- Pour chacune des zone d’analyse, toutes les sources actives sont linéairement indépendantes (si au moins deux sources sont actives dans la même zone). Pour plus de détails concernant cette hypothèse, il est possible de consulter [83].

En tenant compte de ces hypothèses, il est alors possible de détecter ces zones en se basant sur la propriété suivante :

**Propriété (1).** Une zone d'analyse  $\psi$  est mono-source si et seulement si :

$$|\rho_{x_1 x_\ell}(\psi)| = 1, \quad \forall \ell \in \{2 \cdots L\} \quad (2.47)$$

Par conséquent, les zones mono-sources correspondent aux zones pour lesquelles la valeur absolue des coefficients de corrélation est le plus proche de la valeur 1. Dans le cas où le nombre des observations est supérieur à deux, les auteurs calculent pour chaque zone, la moyenne sur  $\ell$  de  $|\rho_{x_1 x_\ell}(\psi)|$ , avec  $2 \leq \ell \leq L$ , notée  $|\overline{\rho_{x_1 x_\ell}(\psi)}|$ . Ainsi, la meilleure zone mono-source correspond à la zone ayant la plus grande valeur de  $|\overline{\rho_{x_1 x_\ell}(\psi)}|$  et ce, conformément à la Propriété (1). En pratique, si cette mesure est supérieure à un seuil (fixé manuellement et en général très proche de 1), ils considèrent cette zone comme étant mono-source. Pour plus de détails concernant ce critère, en particulier la version centrée ou non centrée de ce dernier, il est possible de consulter [85, 11] ou bien [68] dans lequel les auteurs considèrent la version temps-échelle, ou bien encore [83] de manière plus générale.

Une autre manière de détecter ces zones mono-sources a été présentée dans TiFROM. Dans cette dernière méthode, et pour chaque zone d'analyse, les auteurs calculent la variance de plusieurs rapports d'observations notés  $\alpha_\ell(t, \omega)$ , et présentés comme suit :

$$\alpha_\ell(t, \omega) = \frac{x_\ell(t, \omega)}{x_1(t, \omega)}, \quad \forall \ell \in \{2 \cdots L\}. \quad (2.48)$$

De la même manière que l'approche présentée plus haut, les auteurs utilisent dans cette version de la méthode les hypothèses suivantes :

- Pour chacune des sources, il existe au moins une zone d'analyse dans laquelle cette source est active.
- Pour chacune des zones d'analyse, si plusieurs sources sont actives, elles doivent varier de telle façon qu'au moins un des rapports d'observations (2.48) ne soit pas constant dans cette zone. Pour plus de détails concernant cette hypothèse, il est possible de consulter [83].

On en déduit que si une des sources est la seule à être active dans une zone d'analyse  $\psi$ , les rapports (2.48) seront constants dans toute cette dernière zone. Par conséquent, la détection des zones mono-sources est, dans ce cas, basée sur la propriété suivante :

**Propriété (2).** Une zone d'analyse  $\psi$  est mono-source si et seulement si :

$$V \{ \alpha_\ell(t, \omega) \} (\psi) = 0, \quad \forall \ell \in \{2 \cdots L\}, \quad (2.49)$$

où  $V \{.\}$  représente la variance. Ainsi, la meilleure zone mono-source correspond, en pratique, à la zone ayant la plus petite valeur de la moyenne sur  $\ell$  du critère présenté ci-dessus et ce, conformément à la Propriété (2). Cependant, il est important de noter que le critère présenté ci-dessus souffre du caractère non-symétrique de la variance du rapport d'observation, ce qui peut induire une dégradation des performances (voir [11] pour plus de détails). Par conséquent, l'approche basée sur la corrélation est considérée comme étant plus attractive que celle basée sur la variance.

Après avoir détecté toutes les zones mono-sources (ou du moins les meilleures zones), les méthodes présentées vont, dans une **troisième** étape, déduire à partir de chacune de ces zones, une estimée d'une des colonnes de la matrice de mélange (à un facteur d'échelle près). Conformément à (2.45), et en considérant les paramètres de covariance présentés dans (2.46), on peut calculer une estimée d'une colonne de la matrice de mélange, à un facteur d'échelle près, en procédant de la manière suivante :

$$\frac{C_{x_\ell x_1}(\psi)}{C_{x_1 x_1}(\psi)} = \frac{a_{\ell k}}{a_{1k}}, \quad (2.50)$$

où  $k$  représente l'indice de la source active dans la zone considérée.

A la fin de cette étape, on obtient pour chacune des sources un ensemble d'estimations de colonnes de la matrice de mélange (un ensemble contient une ou plusieurs estimées par colonne de la matrice de mélange). Il faudra donc combiner dans chaque ensemble les estimées obtenues pour avoir en sortie une unique estimation par colonne de la matrice de mélange (voir [83] pour les différentes stratégies pouvant être utilisées).

Dans TiFROM, l'estimation des colonnes de la matrice de mélange à partir de chacune des zones mono-sources est réalisée directement à partir des rapports d'observation présentés dans (2.48). En combinant ce rapport avec (2.45), on obtient les coefficients d'une des colonnes de la matrice de mélange, à un facteur d'échelle près, de la manière suivante :

$$\alpha_\ell(t, \omega) = \frac{a_{\ell k}}{a_{1k}}, \quad \forall \ell \in \{1 \cdots L\}. \quad (2.51)$$

La **dernière** étape consiste à extraire les signaux de sortie correspondant aux signaux sources recherchés à partir des observations ainsi que de la matrice de mélange identifiée dans l'étape précédente. Pour le mélange LI déterminé utilisé plus haut (2.45), on peut déduire ces signaux de sorties que l'on note  $\mathbf{y}(t, \omega)$ , de la manière suivante :

$$\mathbf{y}(t, \omega) = B^{-1} \mathbf{x}(t, \omega). \quad (2.52)$$

où  $B$  est une version normalisée de la matrice de mélange, composée d'éléments égaux à un sur la première ligne et à des rapports d'éléments de la matrice de mélange  $A$  dans les autres lignes. Cette nouvelle matrice  $B$  (équivalente à la matrice de mélange  $A$ ) a été proposée par Y. Deville pour fixer l'indétermination d'échelle. Pour plus de détails, il est possible de consulter [85]. Enfin, une transformée inverse est effectuée afin de retrouver la version temporelle des signaux recherchés. Il est à noter à ce propos qu'il est préférable que l'inversion matricielle réalisée dans (2.52), soit directement effectuée dans le domaine temporel. Par ailleurs, il convient d'indiquer que dans le cas sous-déterminé, ce type de méthodes peut malgré tout réaliser une séparation "partielle" (voir [83] pour plus de détails à ce sujet, ainsi que les références qui y sont citées).

L'avantage de ce type de méthodes par rapport à la première catégorie basée sur la WDO, est qu'elles nécessitent une faible hypothèse de parcimonie. Pour qu'elles soient fonctionnelles, ces méthodes nécessitent pour chacune des sources une seule (ou bien un petit nombre de) zone(s) d'analyse mono-source(s). Ceci étant, pour ce faire, il est nécessaire de fixer un certain nombre de paramètres heuristiques liés soit à la taille de la zone mono-source, soit à la distance entre les colonnes estimées de la matrice de mélange, ou bien encore au critère choisi pour la détection des zones mono-sources. Nous reviendrons de façon plus détaillée sur ces aspects dans le Chapitre 5 qui sera consacré à une contribution relative à une application de ce type de méthodes à des images de télédétection.

Comme pour la première catégorie, plusieurs extensions de ce type de méthodes ont été présentées dans la littérature, parmi lesquelles on peut citer les travaux de D. Smith et al. [86, 87] proposant de réduire les paramètres nécessaires pour le fonctionnement de TiFROM et de TiFCORR grâce à une étape de clustering réalisée avec K-means. Ils proposent également une normalisation de la variance du critère utilisé pour TiFROM [86]. D'autres approches considérées comme une extension des méthodes présentées dans cette catégorie, sont présentées de façon plus détaillée dans [70] et les références qui y sont citées, ainsi que dans le chapitre de livre dédié à ce type de méthodes [83].

### (3) Méthodes hybrides :

Cette dernière catégorie de méthodes utilise des avantages des méthodes présentées ci-dessus, c.à.d. qu'elles ont été développées en se basant à la fois sur les méthodes dites quasi-non-parcimonieuses (TiFROM par exemple) et les méthodes à fortes conditions de parcimonie (DUET par exemple). On peut citer à ce titre, les travaux réalisés par S. Arberet et al. [88, 89]. L'approche proposée repose sur un algorithme de clustering appelé DEMIX (pour Direction Estimation of Mixing matrIX), nécessaire pour estimer le nombre et les directions des sources considérées. L'hypothèse de présence de zones mono-sources est validée par une mesure de "fiabilité" ayant le même rôle que le critère utilisé dans TiFROM (présentée ci-dessus). Cette mesure, qui est utilisée dans l'étape de clustering, permettra de distinguer les zones pour lesquelles une seule source est active, par rapport à celles en contenant plusieurs (sources actives). La mesure en question est basée sur l'Analyse en Composantes Principales (ACP). Dans le même sens, on peut également citer la première partie des travaux présentés par Li et al. [10], c.à.d. celle liée à l'identification de la matrice de mélange, qui est là aussi considérée comme une extension de DUET et TiFROM. Pour estimer la matrice de mélange, les auteurs commencent par détecter, à partir de la matrice des rapports des observations (dans le domaine TF), les sous-matrices ayant des colonnes identiques. Celles-ci correspondent chacune à une des colonnes de la matrice de mélange. Chaque sous-matrice ayant des colonnes identiques forme  $n$  droites horizontales correspondant aux  $n$  lignes d'une des colonnes de la matrice de mélange. Il est à noter que les colonnes de ces sous-matrices ne sont pas nécessairement collées l'une à l'autre (contiguës), mais ce qu'il faudra retenir est que chacune d'entre elles (dans la même sous-matrice) correspond à un des points du domaine TF où une seule source est active (c.à.d. différente de zéro).

#### 2.3.4 Approches bayésiennes

Reprenons le modèle de mélange LI (dans le domaine temporel) présenté plus haut, dans ce chapitre (2.2), et qu'on rappelle ici avec une notation matricielle :

$$X = AS,$$

avec  $X$ ,  $A$  et  $S$  représentant respectivement la matrice contenant l'ensemble des observations, la matrice de mélange et enfin celle des sources.

La structure générale retenue pour ce type d'approches, est résumée comme suit :

- Définition d'un modèle statistique liant les observations aux sources, ceci dans l'objectif d'en déduire la loi de probabilité  $p(X|A, S)$  correspondante. Celle-ci représente la vraisemblance des inconnues.



- Attribution de lois *a priori* pour toutes les inconnues du problème, à savoir les sources et la matrice de mélange ( $p(S)$  et  $p(A)$ ).
- Etablissement de la loi *a posteriori*  $p(A, S|X)$ , en se basant sur la règle de Bayes :

$$p(A, S|X) = \frac{p(X|A, S)p(A)p(S)}{p(X)} \propto p(X|A, S)p(A)p(S), \quad (2.53)$$

avec  $p(X)$  représentant la densité de probabilité des observations, qui est présentée comme étant un terme de normalisation [90].

- Estimation des inconnues (les sources, la matrice de mélange, ou bien les deux en parallèle) grâce à la loi *a posteriori*, identifiée précédemment. Cette étape est réalisée en utilisant des estimateurs dont les plus courants sont le Maximum A Posteriori (MAP) ou bien la Moyenne a Posteriori (MP).

Ce type d’approches nécessite donc une étape majeure, qui est la définition en premier lieu de lois *a priori* des sources et de la matrice de mélange définies par un ensemble de paramètres inconnus (à estimer), et repose sur la règle de Bayes. Un autre point majeur est lié à la technique de calcul considérée pour résoudre le problème d’optimisation (par exemple l’algorithme EM, pour “Expectation Maximization”). On peut trouver dans la littérature plusieurs méthodes fondées sur ce principe, présentant des résultats intéressants, ceci étant, l’inconvénient majeur de ces méthodes est l’importance du coup calculatoire engendré pour la plupart des algorithmes. Pour une vision globale de l’ensemble des approches bayésiennes existantes, il est possible de consulter le Chapitre 12 de [26] ainsi que les références qui y sont citées (ou bien le Chapitre 12 de [24]). Enfin, il est à signaler, que les méthodes proposées dans le cadre de cette thèse ne sont pas basées sur les approches bayésiennes.

## 2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les principes de base de la SAS, les différents types de mélanges linéaires considérés, en particulier le mélange linéaire instantané, et enfin les grandes classes de méthodes de SAS, à savoir l’ACI, la NMF, l’ACPa, et enfin, nous avons également abordé les méthodes basées sur les approches bayésiennes.

Dans le prochain chapitre, et conformément au plan du manuscrit, nous proposons de détailler quelques méthodes développées ces dernières années dans le cadre du démélange spectral. Nous commençons par les principales méthodes géométriques existantes puis continuerons avec celles basées sur des méthodes de SAS dont la majorité ont été abordées ci-dessus.

# Bibliographie

- [1] J. Hérault, C. Jutten, and B. Ans, “Détection de grandeurs primitives dans un message composite par une architecture de calcul neuromimétique en apprentissage non supervisé,” *GRETSI*, pp. 1017–1022, Mai 1985.
- [2] P. Comon and C. Jutten, *séparation de sources 1 : concepts de base et analyse en composantes indépendantes*, Lavoisier / Hermes-science, Paris, France, 2007.
- [3] Y. Bar-Ness, J.W. Carlin, and M.L. Steinberger, “Bootstrapping adaptive interference cancelers : some practical limitations,” in *Global Telecommunications Conference*, 1982, vol. 3, pp. 1251–1255.
- [4] Y. Deville and N. Charkani, “Analysis of the stability of time-domain source separation algorithms for convolutively mixed signals,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP / Munich, Germany)*, pp. 1835–1838, April 1997.
- [5] N. Charkani and Y. Deville, “Self-adaptive separation of convolutively mixed signals with a recursive structure. part i : stability analysis and optimization of asymptotic behaviour,” *Signal Processing*, vol. 73, no. 3, pp. 225–254, April 1999.
- [6] L. Parra and C. Spence, “Convolutive blind separation of non-stationary sources,” *IEEE Transaction on Speech and Audio Processing*, vol. 8, no. 3, pp. 320–327, May 2000.
- [7] D.T. Pham, C. Servière, and H. Boumaraf, “Blind separation of speech mixtures based on nonstationarity,” in *7th International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA / Paris, France)*, 2003, vol. 2, pp. 73–76.
- [8] O. Yilmaz and S. Rickard, “Blind separation of speech mixtures via time-frequency masking,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 52, no. 7, pp. 1830–1847, July 2004.
- [9] F. Abrard and Y. Deville, “A time-frequency blind signal separation method applicable to underdetermined mixtures of dependent sources,” *Signal Processing*, vol. 85, no. 7, pp. 1389–1403, July 2005.
- [10] Y. Li, S-I. Amari, A. Cichocki, D.W.C Ho, and S. Xie, “Underdetermined blind source separation based on sparse representation,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 54, no. 2, pp. 423–437, February 2006.
- [11] Y. Deville and M. Puigt, “Temporal and time-frequency correlation-based blind source separation methods. part i : determined and underdetermined linear instantaneous mixtures,” *Signal Processing*, vol. 87, no. 3, pp. 374–407, March 2007.
- [12] Y. Deville and L. Andry, “Application of blind source separation techniques to multi-tag contactless identification systems,” *International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA)*, vol. 1, pp. 73–78, Dec. 1995.
- [13] Y. Deville, J. Damour, and N. Charkani, “Multi-tag radio-frequency identification systems based on blind source separation neural networks,” *Neurocomputing*, vol. 49, pp. 369–388, 2002.

- [14] H. Saylani, Y. Deville, S. Hosseini, and M. Habibi, "A multi-tag radio-frequency identification system using new blind source separation methods based on spectral decorrelation / système d'identification radio-fréquence multi-badger utilisant de nouvelles méthodes de séparation aveugle de sources à décorrélation spectrale," *Physical and Chemical News*, vol. 35, pp. 31–42, May 2007.
- [15] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, "Fetal electrocardiogram extraction by source subspace separation," *IEEE SP on High-Order Statistics (ATHOS Workshop / Girona, Spain)*, pp. 134–138, June 1995.
- [16] A.K. Barros, A. Mansour, and N. Ohnishi, "Removing artifacts from electrocardiographic signals using independent components analysis," *Neurocomputing*, vol. 22, pp. 173–186, 1998.
- [17] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, "Fetal electrocardiogram extraction by blind source subspace separation," *IEEE Tran. on biomedical engineering*, vol. 47, no. 5, pp. 567–572, May 2000.
- [18] V. Zarzoso and A.K. Nandi, "Noninvasive fetal electrocardiogram extraction : blind separation versus adaptive noise cancellation," *IEEE Tran. on biomedical engineering*, vol. 48, no. 1, pp. 12–18, Jan. 2001.
- [19] J.S. Lee, D.D. Lee, S. Choi, and D.S. Lee, "Application of non-negative matrix factorization to dynamic positron emission tomography," *In Proceeding of the International Conference on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (San Diego, California, USA)*, pp. 629–632, 2001.
- [20] B. Azzerboni, F. La Foresta, N. Mammone, and F.C. Morabito, "A new approach based on wavelet-ica algorithms for fetal electrocardiogram extraction," *European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN / Bruges, Belgium)*, pp. 193–198, April 2005.
- [21] T. He, G. Clifford, and L. Tarassenko, "Application of independent component analysis in removing artefacts from the electrocardiogram," *Neural Computing and Applications*, vol. 15, pp. 105–116, 2006.
- [22] A. Kachenoura, L. Albera, and L. Senhadji, "Blind source separation in biomedical engineering," *ITBM-RBM*, vol. 28, pp. 20–34, May 2007.
- [23] A. Hyvarinen, J. Karhunen, and E. Oja, *Independent Component Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [24] P. Comon and C. Jutten, *séparation de sources 2 : au delà de l'aveugle et applications*, Lavoisier / Hermes-science, Paris, France, 2007.
- [25] A. Cichocki, R. Zdunek, A. H. Phan, and S-I. Amari, *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations : Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation*, John Wiley and Sons, Chichester, United Kingdom, 2009.
- [26] P. Comon and C. Jutten, *Handbook of Blind Source Separation : Independent Component Analysis and Applications*, Academic Press, 2010.
- [27] Y. Deville, *Signaux temporels et spatiotemporels : Analyse des signaux, théorie de l'information, traitement d'antenne, séparation aveugle de sources*, Ellipses, Paris, France, 2011.
- [28] P.D. O'Grady, B.A. Pearlmutter, and S.T. Rickard, "Survey of sparse and non-sparse methods in source separation," *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 15, pp. 18–33, 2005.
- [29] P. Comon, "Independent component analysis, a new concept?," *Signal Processing*, vol. 36, pp. 287–314, 1994.

- 
- [30] P. Comon, "Analyse en composantes indépendantes et identification aveugle," *Traitement du Signal*, vol. 7, no. 5, pp. 435–450, Déc. 1990.
  - [31] P. Comon, "Independent component analysis," *International Signal Processing Workshop on High-Order Statistics (Chamrousse, France)* re-published in J.L. Lacoume, ed., *Higher-Order Statistics*, Elsevier, Amsterdam, pp. 29–38, 1992.
  - [32] C. Jutten and J. Héroult, "Blind separation of sources, part i : An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture," *Signal Processing*, vol. 24, no. 1, pp. 1–10, Jul. 1991.
  - [33] J.L. Lacoume and P. Ruiz, "Separation of independent sources from correlated inputs," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 12, pp. 3074–3078, December 1992.
  - [34] Y. Deville, *Chapter 10. Extension of a cumulant-based ICA method to underdetermined mixtures and separability analysis (pp. 211-230)*, Signal Processing, New Research, ISBN : 978-1-62808-141-1, G.R. Naik Ed, Nova Science Publishers, New York, USA, 2013.
  - [35] J-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non-gaussian signals," *IEE Proceedings-F*, vol. 140, no. 6, pp. 362–370, Dec. 1993.
  - [36] E. Moreau, "Une généralisation de l'algorithme jade," *Dix-septième colloque GRETSI*, Vannes, pp. 1137–1140, Sep. 1999.
  - [37] E. Moreau, "A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 3, pp. 530–541, March 2001.
  - [38] N. Delfosse and P. Loubaton, "Adaptive blind separation of independent sources : A deflation approach," *Signal Processing*, vol. 45, no. 1, pp. 59–83, February 1995.
  - [39] A. Hyvarinen and E. Oja, "A fast fixed-point algorithm for independent component analysis," *Neural Computation*, vol. 9, no. 7, pp. 1483–1492, 1997.
  - [40] M. Gaeta and J.L. Lacoume, "Estimateurs du maximum de vraisemblance étendus à la séparation de sources non gaussiennes," *Traitement du Signal*, vol. 7, no. 5, pp. 419–434, 1990.
  - [41] D-T. Pham and P. Garat, "Blind separation of mixture of independent sources through a quasi-maximum likelihood approach," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 7, pp. 1712–1725, July 1997.
  - [42] A.J. Bell and T.J. Sejnowski, "An information-maximisation approach to blind separation and blind deconvolution," *Neural Computation*, vol. 7, no. 6, pp. 1129–1159, November 1995.
  - [43] L. Tong, R-W. Liu, V.C. Soon, and Y-F. Huang, "Indeterminacy and identifiability of blind identification," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, no. 5, pp. 499–509, May 1991.
  - [44] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J-F. Cardoso, and E. Moulines, "A blind source separation technique using second-order statistics," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 434–444, Feb. 1997.
  - [45] A. Souloumiac, "Blind source detection and separation using second order non-stationarity," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP / Detroit, Michigan, USA)*, 1995, vol. 3, pp. 1912–1915.
  - [46] D-T. Pham and J-F. Cardoso, "Blind separation of instantaneous mixtures of nonstationary sources," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 9, pp. 1837–1848, September 2001.

- [47] P. Paatero and U. Tapper, "Positive matrix factorization : A non-negative factor model with optimal utilization of error estimates of data values," *Environmetrics*, vol. 5, no. 2, pp. 111–126, 1994.
- [48] P. Paatero, "Least squares formulation of robust non-negative factor analysis," *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 37, no. 1, pp. 23–35, 1997.
- [49] D.D. Lee and H.S. Seung, "Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization," *Nature*, vol. 401, pp. 788–791, 1999.
- [50] D.D. Lee and H.S. Seung, "Algorithms for non-negative matrix factorization," *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 13, pp. 556–562, 2001.
- [51] C-j. Lin, "Projected gradient methods for non-negative matrix factorization," *Neural Computation*, vol. 19, no. 10, pp. 2756–2779, 2007.
- [52] R. Zdunek and A. Cichocki, "Fast nonnegative matrix factorization algorithms using projected gradient approaches for large-scale problems," *Computational Intelligence and Neuroscience*, Article ID 939567, vol. 2008, pp. 1–13, 2008.
- [53] A. Cichocki and R. Zdunek, "Regularized alternating least squares algorithms for non-negative matrix/tensor factorisation," *Advances in Neural Networks - ISNN 2007, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4493, pp. 793–802, 2007.
- [54] A. Cichocki, R. Zdunek, and S-i. Amari, "Hierarchical als algorithms for nonnegative matrix and 3d tensor factorization," *Independent Component Analysis and Signal Separation / 7th International Conference (ICA / London, UK)*, vol. 4666, pp. 169–176, 2007.
- [55] R. Zdunek and A. Cichocki, "Non-negative matrix factorization with quasi-newton optimization," *the 8th International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing (ICAISC / Zakopane, Poland)*, vol. 4024, pp. 870–879, 2006.
- [56] R. Zdunek and A. Cichocki, "Nonnegative matrix factorization with constrained second-order optimization," *Signal Processing*, vol. 87, pp. 1904–1916, 2007.
- [57] A. Cichocki, R. Zdunek, and S-i. Amari, "Nonnegative matrix and tensor factorization [lecture notes]," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 1, pp. 142–145, 2008.
- [58] S. Moussaoui, D. Brie, and J. Idier, "Non-negative source separation : range of admissible solutions and conditions for the uniqueness of the solution," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP / Philadelphia, USA)*, vol. 5, pp. 289–292, 2005.
- [59] D.L. Donoho and V. Stodden, "When does non-negative matrix factorization give a correct decomposition into parts?," *Neural Information Processing Systems (NIPS / British Columbia, Canada)*, 2003.
- [60] M.S. Karoui, *Méthodes de séparation aveugle de sources et application à la télédétection spatiale*, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2012.
- [61] A.N. Langville, C.D. Meyer, and R. Albright, "Initializations for the nonnegative matrix factorization," in *International conference on Knowledge Discovery and Data*, 2006.
- [62] M. Rezaei, R. Boostani, and M. Rezaei, "An efficient initialization method for nonnegative matrix factorization," *Journal of Applied Science*, vol. 11, no. 2, pp. 354–359, November 2010.
- [63] M. Rezaei and R. Boostani, "Using the genetic algorithm to enhance nonnegative matrix factorization initialization," *Expert Systems*. doi : 10.1111/exsy.12031, May 2013.

- 
- [64] M.W. Berry, M. Browne, A.N. Langville, V.P. Pauca, and R.J. Plemmons, "Algorithms and applications for approximate nonnegative matrix factorization," *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 52, pp. 155–173, 2007.
  - [65] P.O. Hoyer, "Non-negative sparse coding," *IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing (NNSP / Martigny, Switzerland)*, pp. 557–565, 2002.
  - [66] V.P. Pauca, J. Piper, and R.J. Plemmons, "Nonnegative matrix factorization for spectral data analysis," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 416, pp. 29–47, 2006.
  - [67] K. Drakakis, S. Rickard, R. De Frein, and A. Cichocki, "Analysis of financial data using non-negative matrix factorization," *International Mathematical Forum*, vol. 3, no. 38, pp. 1853–1870, 2008.
  - [68] Y. Deville, D. Bissessur, M. Puigt, S. Hosseini, and H. Carfantan, "A time-scale correlation-based blind separation method applicable to correlated sources," in *European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN / Bruges, Belgium)*, 2006, pp. 337–343.
  - [69] F. Hlawatsh and G.F. Boudreaux-Bartels, "Linear and quadratic time-frequency signal representations," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 9, no. 2, pp. 21–67, 1992.
  - [70] M. Puigt, *Méthodes de séparation aveugle de sources fondées sur des transformées temps-fréquence. Application à des signaux de parole*, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2007.
  - [71] A. Jourjine, S. Rickard, and O. Yilmaz, "Blind separation of disjoint orthogonal signals : Demixing n sources from 2 mixtures," in *Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP / Istanbul, Turkey)*. IEEE, 2000, vol. 5, pp. 2985–2988.
  - [72] S. Rickard and O. Yilmaz, "On the approximate w-disjoint orthogonality of speech," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP / Orlando, Florida, USA)*, vol. 1, pp. 529–532, 2002.
  - [73] J. Rosca, C. Borss, and R. Balan, "Generalized sparse signal mixing model and application to noisy blind source separation," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP / Montreal, Quebec, Canada)*, 2004, vol. 3, pp. 877–880.
  - [74] R. Balan, J. Rosca, and S. Rickard, "Non-square blind source separation under coherent noise by beamforming and time-frequency masking," in *International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA / Nara, Japan)*, 2003, pp. 313–318.
  - [75] R. Roy and T. Kailath, "Esprit - estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984–995, 1989.
  - [76] S. Rickard, T. Melia, and C. Fearon, "Desprit- histogram based blind source separation of more sources than sensors using subspace methods," in *2005 IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA / New Paltz, New York, USA)*, 2005, pp. 5–8.
  - [77] A. Aissa-El-Bey, N. Linh-Trung, K. Abed-Meraim, A. Belouchrani, and Y. Grenier, "Underdetermined blind separation of nondisjoint sources in the time-frequency domain," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 3, pp. 897–907, 2007.
  - [78] A. Aissa-El-Bey, K. Abed-Meraim, and Y. Grenier, "Blind separation of underdetermined convolutive mixtures using their time-frequency representation," *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 15, no. 5, pp. 1540–1550, 2007.

- [79] D. Peng and Y. Xiang, “Underdetermined blind source separation based on relaxed sparsity condition of sources,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 2, pp. 809–814, 2009.
- [80] S.M. Aziz Sbai, A. Aissa-El-Bey, and D. Pastor, “Robust underdetermined blind audio source separation of sparse signals in the time-frequency domain,” in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP / Prague, Czech)*, 2011, pp. 3716–3719.
- [81] P. Bofill and M. Zibulevsky, “Underdetermined blind source separation using sparse representations,” *Signal Processing*, vol. 81, pp. 2353–2362, 2001.
- [82] P. Bofill, “Underdetermined blind separation of delayed sound sources in the frequency domain,” *Neurocomputing*, vol. 55, pp. 627–641, 2003.
- [83] G.R. Naik and W. Wang, *Blind Source Separation : Advances in Theory, Algorithms and Applications. Chapter 6, Sparse component analysis : a general framework for linear and nonlinear blind source separation and mixture identification (pp. 151-196)*, Springer, 2014.
- [84] M. Puigt and Y. Deville, “Time-frequency ratio-based blind separation methods for attenuated and time-delayed sources,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 19, pp. 1348–1379, 2005.
- [85] Y. Deville, “Temporal and time-frequency correlation-based blind source separation methods,” in *International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA / Nara, Japan)*, 2003, pp. 1–4.
- [86] D. Smith, J. Lukasiak, and I. Burnett, “A two channel, block-adaptive audio separation technique based upon time-frequency information,” in *European Signal Processing Conference (EUSIPCO / Vienna, Austria)*, 2004, pp. 393–396.
- [87] D. Smith, J. Lukasiak, and I. Burnett, “Two channel, block-adaptive audio separation using the cross correlation of time-frequency information,” in *International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA / Granada, Spain)*, 2004, pp. 889–897.
- [88] S. Arberet, R. Gribonval, and F. Bimbot, “A robust method to count and locate audio sources in a stereophonic linear instantaneous mixture,” *Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA / Charleston, SC, USA)*, pp. 536–543, 2006.
- [89] S. Arberet, R. Gribonval, and F. Bimbot, “A robust method to count and locate audio sources in a stereophonic linear anechoic mixture,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP / Honolulu, Hawaii)*, vol. 3, pp. 745–748, 2007.
- [90] S. Moussaoui, *Séparation de sources non négatives. Application au traitement des signaux de spectroscopie*, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy 1, 2005.

# Chapitre 3

## Démélange spectral non supervisé

### Contents

---

|            |                                                                                                  |           |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Introduction</b>                                                                              | <b>48</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Généralités</b>                                                                               | <b>48</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Principales méthodes géométriques de démélange spectral</b>                                   | <b>53</b> |
| 3.3.1      | Méthodes géométriques avec pixels purs                                                           | 53        |
| 3.3.2      | Méthodes géométriques sans pixels purs                                                           | 55        |
| <b>3.4</b> | <b>Application des méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS)<br/>à l'imagerie spatiale</b> | <b>56</b> |
| <b>3.5</b> | <b>Conclusion</b>                                                                                | <b>60</b> |

---



### 3.1 Introduction

Nous avons abordé en Chapitre 1 des généralités sur l'imagerie de la télédétection spatiale, notamment les caractéristiques et la structure de ce type de données. Celles-ci sont représentées comme un cube de données à deux dimensions spatiales et une dimension spectrale correspondant au nombre de bandes spectrales considérées dans l'image en question. Puis dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les différentes classes de méthodes de la SAS. Comme discuté dans ce dernier, toutes ces méthodes ont été utilisées dans de nombreuses applications : l'acoustique, le traitement des signaux électromagnétiques et le biomédical.

Dans ce qui suit, nous allons évoquer un domaine d'application sur lequel est basé notre travail, en l'occurrence, la télédétection. Plus précisément, il sera question dans le présent chapitre, de présenter les méthodes de "démélange spectral" appliquées à l'imagerie de télédétection.

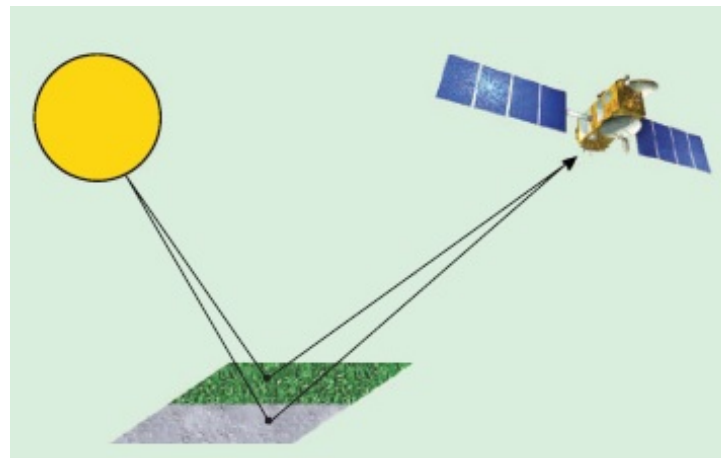
Nous allons donc commencer par présenter des généralités sur le démélange spectral ainsi que sur les modèles de mélange utilisés dans la littérature, les principales méthodes géométriques existantes et enfin celles basées sur des méthodes de SAS citées dans le chapitre précédent, à savoir l'ACI, la NMF et l'ACPa.

### 3.2 Généralités

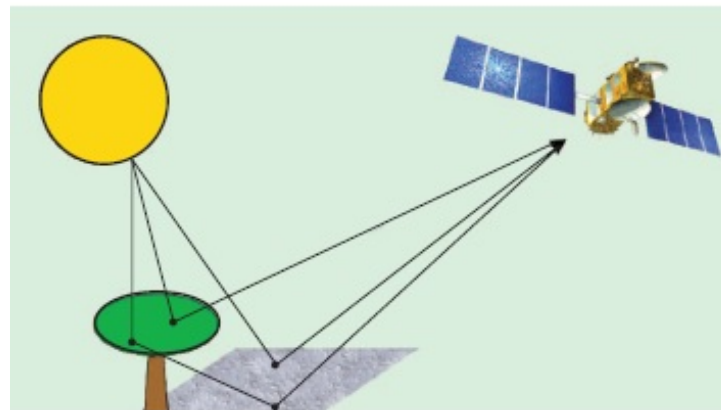
En raison de la résolution spatiale limitée de certains capteurs de télédétection spatiale, il est fréquent que les spectres des pixels composant les images reçues à partir de ces capteurs soient des mélanges de contributions élémentaires. Pour pouvoir analyser ce type d'images, il est souvent nécessaire d'effectuer un "démélange spectral". Cette procédure, sur laquelle est basé notre travail, permet la décomposition d'un spectre de pixel mélangé en un ensemble de spectres de matériaux purs, appelés endmembers, et un ensemble de fractions d'abondance indiquant la proportion de chaque composant spectral dans le pixel considéré [1, 2]. Conformément à cette définition, et sous réserve de ne pas disposer d'information a priori, on peut considérer le démélange spectral comme étant un problème de séparation aveugle de sources, où les valeurs des pixels des images reçues, les spectres des endmembers et les fractions d'abondance correspondantes peuvent être considérés respectivement comme les observations, la matrice de mélange et les sources présentées dans le chapitre précédent.

Toutes les méthodes de démélange reposent sur un modèle de mélange pré-défini. Selon l'application et/ou le contenu des données utilisées, celui-ci peut être linéaire ou non-linéaire (voir illustrations dans la figure 3.1). Le premier modèle, c.à.d. linéaire, est celui qui a été le plus utilisé dans la littérature, et donc on se focalisera sur les méthodes basées sur ce modèle qui, en plus de sa facilité d'utilisation, est considéré dans certaines situations comme étant une bonne approximation de l'environnement réel [2].

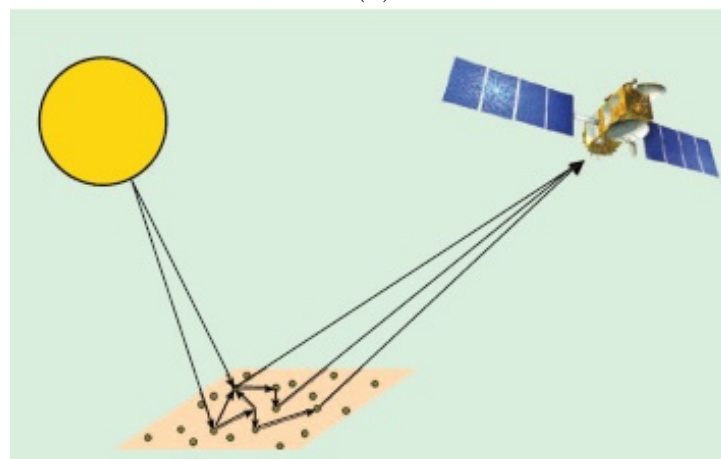
Comme illustré dans la figure 3.1-a, l'hypothèse principale sur laquelle repose le modèle de mélange linéaire est que chaque rayonnement incident interagit avec un seul type de matériau [1, 2]. Dans ce cas, et après vectorisation des dimensions spatiales, on peut exprimer les réflectances



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.1 – Illustration du modèle de mélange : (a) linéaire, (b) et (c) non-linéaire [3].

non-négatives observées dans la  $\ell^{\text{ème}}$  bande spectrale, pour un pixel donné  $n$ , comme suit <sup>14</sup> :

$$x_\ell(n) = \sum_{m=1}^M r_{\ell m} f_m(n) \quad \forall n \in \{1 \cdots N\}, \ell \in \{1 \cdots L\} \quad (3.2)$$

où  $r_{\ell m}$  représente la  $\ell^{\text{ème}}$  composante spectrale (réfectance) du  $m^{\text{ème}}$  composant pur.  $f_m(n)$  représente la fraction d'abondance du  $m^{\text{ème}}$  composant pur dans le  $n^{\text{ème}}$  pixel, et enfin le nombre de composants purs est représenté par  $M$ .

Si l'on considère les  $N$  pixels d'une image de télédétection composée de  $L$  bandes spectrales, on obtient l'écriture matricielle suivante :

$$X = RF, \quad (3.3)$$

où  $X$  représente l'image de télédétection observée, qui est définie comme suit :

$$X = [x(1) \cdots x(N)] \quad \text{avec} \quad x(n) = [x_1(n) \cdots x_L(n)]^T. \quad (3.4)$$

Les colonnes de  $R$  contiennent les spectres (non-négatifs) des endmembers, qui sont présentés comme suit :

$$R = [r_1 \cdots r_M] \quad \text{avec} \quad r_m = [r_{1m} \cdots r_{Lm}]^T. \quad (3.5)$$

En ce qui concerne la matrice  $F$ , chaque colonne de cette dernière contient les fractions d'abondance de tous les composants purs dans le pixel considéré. Celle-ci est présentée comme suit :

$$F = [f(1) \cdots f(N)] \quad \text{avec} \quad f(n) = [f_1(n) \cdots f_M(n)]^T. \quad (3.6)$$

Par ailleurs, il sera nécessaire, pour ce type de données, d'appliquer les contraintes de positivité (ou ANC en anglais, pour "abundance nonnegativity constraint") et d'additivité (ou ASC en anglais, pour "abundance sum constraint") suivantes :

$$f_m(n) \geq 0, \quad \forall \begin{matrix} m \in \{1 \cdots M\} \\ n \in \{1 \cdots N\} \end{matrix}, \quad (3.7)$$

$$\sum_{m=1}^M f_m(n) = 1 \quad \forall n \in \{1 \cdots N\}. \quad (3.8)$$

En tenant compte des contraintes physiques présentées ci-dessus, plusieurs méthodes du domaine considéré exploitent les propriétés géométriques liées au problème. Ces propriétés concernent le fait que l'ensemble des observations sont contenues dans un simplexe de dimension  $(M - 1)$  et dont les sommets sont les spectres des endmembers recherchés. De ce fait, ce type de méthodes consiste à retrouver les sommets de ce simplexe. On abordera les principales approches basées sur ce principe dans la prochaine section.

Enfin, et conformément à la terminologie de la séparation de sources présentée dans le chapitre

---

14. Pour rappel, nous avons présenté dans le chapitre précédent, le modèle LI comme suit :

$$x_\ell(t) = \sum_{m=1}^M a_{\ell m} s_m(t) \quad \forall \ell \in \{1 \cdots L\}, \quad (3.1)$$

où  $a_{\ell m}$  et  $s_m(t)$  représentent respectivement les coefficients de mélange (pouvant influencer la contribution de la source  $m$  sur le capteur  $\ell$ ) et la source  $m$  à un instant  $t$ , et  $x_\ell(t)$  représente l'observation  $\ell$  obtenue par mélange linéaire des sources au même instant  $t$ .

précédent, la matrice  $F$  des fractions d'abondance et la matrice  $R$  des spectres des endmembers seront, pour la suite de ce manuscrit, respectivement désignées par les termes sources et matrices de mélange (devant être estimées), ceci à partir d'une observation  $X$  représentant l'image de télédétection. Il est à préciser que nous avons retenu les acronymes  $F$  et  $R$  à la place de  $A$  et  $S$  pour éviter de confondre nos sources (désignées dans chapitre précédent par  $S$ ) avec les spectres, de même pour la matrice de mélange (désignée dans chapitre précédent par  $A$ ) avec les abondances. Par ailleurs, la figure 3.2 représente un schéma récapitulatif du modèle utilisé dans la suite de ce manuscrit et ce, dans l'objectif de le distinguer des méthodes utilisant les sources comme étant des spectres<sup>15</sup>, ce qui n'est pas le cas de nos méthodes, pour lesquelles nos sources sont considérées comme étant des fractions d'abondance.

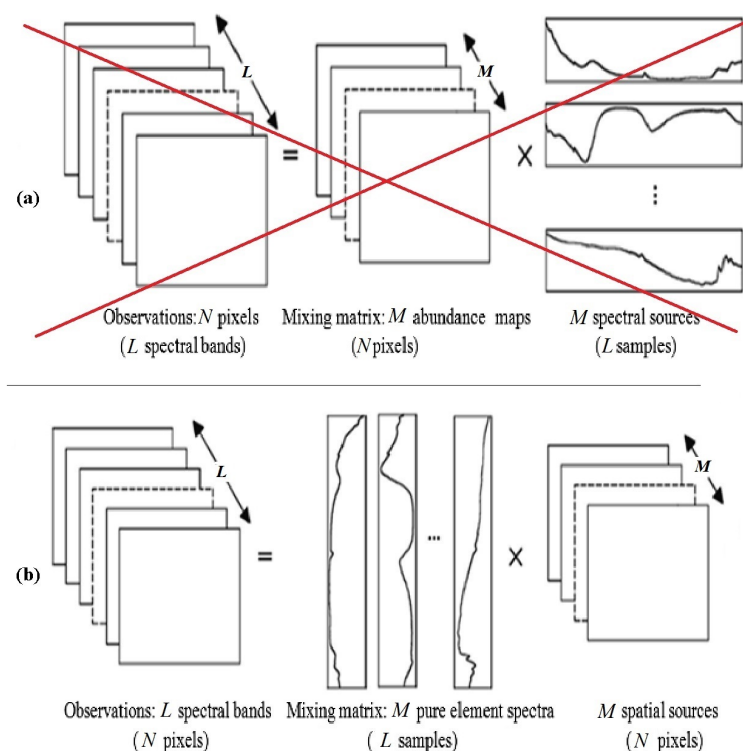


FIGURE 3.2 – Représentation du modèle de mélange linéaire spatial utilisé (adaptée de [4])

Par ailleurs, dans la partie inférieure (c.à.d. (b) et (c)) de la figure 3.1, il est présenté la deuxième catégorie de modèles de mélange pouvant être utilisés pour le démixage spectral. Dans ce type de modèle, appelé non-linéaire, le rayonnement réfléchi par la cible interagit avec plusieurs matériaux (ou obstacles) avant d'être réfléchi vers le capteur (comme présenté dans le premier chapitre). On rencontre ce phénomène (engendrant des réflexions multiples) dans deux cas de figures :

- structure complexe d'une scène (par exemple une zone urbaine) dans laquelle le rayonnement peut interagir avec plusieurs matériaux (immeubles, arbres ...). Ceci est illustré dans la figure 3.1-b,

<sup>15</sup>. Pour plus de détails concernant la version spectrale du modèle de mélange LI, il est possible de consulter [4].

- mélange intime (ou homogène), comme par exemple des grains de sables, qui est illustré dans la figure 3.1-c.

Dans ces conditions, un modèle non linéaire est plus adapté pour représenter le mélange spectral. Pour plus de détails concernant ce type de modèles et les méthodes correspondantes, il est possible de consulter les travaux réalisés dans notre équipe par I. Meganem et al. [5] présentant un modèle non linéaire adapté à des milieux urbains, ou bien de manière plus générale, ceux de N. Dobigeon et al. [3] et les références qui y sont citées. En ce qui nous concerne, et dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéressons aux grands ensembles d’occupation des sols présentant un relief plus ou moins plat (comme par exemple des parcelles agricoles) et éclairé de manière homogène, et ainsi, le modèle utilisé pour les méthodes proposées dans les prochains chapitres sera, comme mentionné plus haut, de type linéaire.

De nombreuses méthodes de démélange spectral linéaire (ou LSU en anglais, pour “Linear Spectral Unmixing”) ont été proposées ces 20 dernières années. Dans la majorité d’entre elles, le démélange est effectué en trois étapes principales :

- Réduction de dimension (en ce qui concerne les images hyperspectrales).
- Estimation des spectres des endmembers.
- Inversion du modèle pour estimer les fractions d’abondance.

La première étape est très utile pour réduire la complexité de l’étape d’extraction des endmembers et d’inversion. La plupart des méthodes existantes réalisent cette étape via l’Analyse en Composantes Principales (ACP) [6], ou bien grâce à l’approche intitulée “Maximum Noise Fraction (MNF)” [7]. Dans le même ordre d’idée, on peut également parler du caractère aveugle du démélange. En effet, la majorité des méthodes existantes supposent que le nombre considéré de sources est connu a priori. Toutefois, il est important de signaler l’existence de méthodes pouvant donner une bonne estimation de ce nombre. Un bon résumé de ce type de méthodes est présenté dans [2] ; les plus connues sont, celle présentée par C-I. Chang et Q. Du [8], appelée “Virtual Dimensionality” (VD), et celle présentée par J.M. Bioucas-Dias et J.M.P. Nascimento [9], appelée “HYperspectral Signal identification by minimum error” (HySime). Ces dernières font partie des méthodes les plus évoquées dans la littérature.

Avant d’aborder les méthodes d’estimation des spectres des endmembers, il est utile de préciser que dans le cas où la matrice de mélange (contenant les spectres des endmembers) est connue, ou bien après avoir estimé la matrice de mélange (avec les méthodes que nous présenterons ci-dessous), il est possible d’estimer les sources (i.e. les fractions d’abondance) par inversion du modèle de mélange. Dans le cas sur-déterminé, cette inversion peut être effectuée, en résolvant un problème de moindres carrés linéaire, comme suit :

$$\hat{f}(n) = \arg \min \|x(n) - Rf(n)\| \quad \forall n \in \{1 \dots N\} \quad (3.9)$$

A ce titre, et afin de respecter les contraintes physiques imposées (Eqs. (3.7) et (3.8)), d’autres méthodes prenant en compte ces contraintes ont été proposées dans la littérature. Et ainsi, cette dernière étape de la chaîne de démélange est généralement effectuée avec la méthode proposée par C-I. Chang et al. [10] et appelée “Non-negative constrained least squares” (NCLS), ou bien celle proposée par D.C. Heinz et al. [11] et appelée “Fully constrained least squares unmixing” (FCLS). Ces dernières font partie des méthodes les plus évoquées dans la littérature. Par ailleurs,

on verra par la suite quelques méthodes pouvant estimer la matrice de mélange et les sources en parallèle, comme par exemple les méthodes de Factorisation en Matrices Non-négatives ou bien d'autres méthodes fondées sur des approches bayésiennes [12].

### 3.3 Principales méthodes géométriques de démixage spectral

En ce qui concerne la deuxième étape de la chaîne de démixage, plusieurs algorithmes ont été proposés dans la littérature. Ces derniers peuvent être classés soit en fonction du modèle de mélange utilisé, ou des hypothèses liées à la présence ou non de pixels purs dans l'image, ou bien encore en fonction du caractère supervisé ou pas de la méthode considérée. En nous basant sur le récent article de J.M. Bioucas-Dias et al. [2] (et également celui de J. Plaza et al. [13]), nous allons dans la section en cours présenter une classification de ce type de méthodes en fonction de la présence ou pas des pixels purs.

#### 3.3.1 Méthodes géométriques avec pixels purs

L'hypothèse principale retenue dans cette catégorie de méthodes consiste à supposer l'existence d'au moins un pixel pur par matériau distinct contenu dans l'image étudiée. De ce fait, l'approche naturelle adoptée consiste à trouver les pixels les plus purs de l'image supposés être positionnés, comme illustré dans la figure 3.3, au niveau des sommets du simplexe contenant les données observées. Plusieurs méthodes ont été proposées dans cette catégorie. Parmi les plus connues on peut citer [14] :

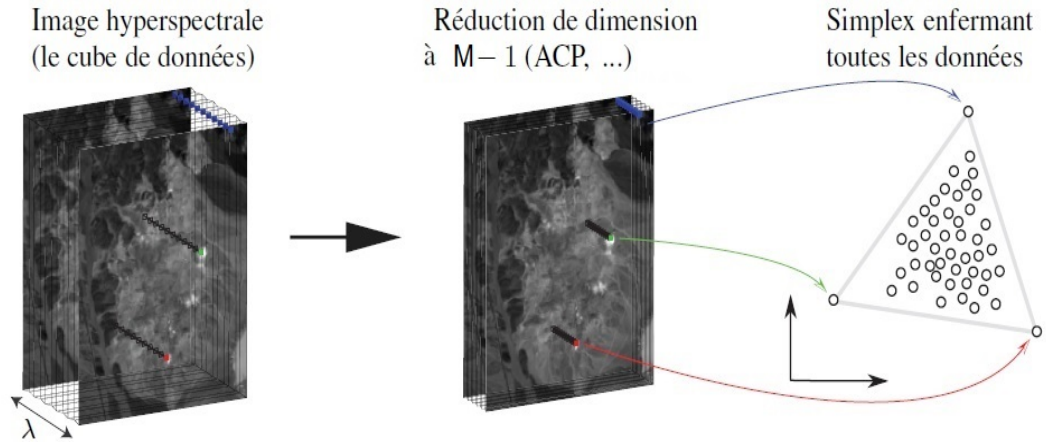


FIGURE 3.3 – Processus d'analyse d'une image hyperspectrale avec une approche géométrique : (1) Réduction de dimension, (2) Identification des pixels purs de l'image positionnés au niveau des sommets du simplexe contenant tous les points [15]

- N-FINDR développée par M.E. Winter [16].
- PPI (Pixel Purity Index) développée par J.W. Boardman et al. [17].
- OSP (Orthogonal Subspace Projection) développée par J.C. Harsanyi et C.-I. Chang [18].
- VCA (Vertex Component Analysis) développée par J.M.P. Nascimento et J.M. Bioucas-Dias [19].
- SMACC (Sequential Maximum Angle Convex Cone) développée par J. Gruninger et al. [20].

Ce qu'il faut retenir avec ce type de méthodes, est qu'elles visent toutes, comme mentionné ci-dessus, à trouver le pixel le plus pur de l'image correspondant à chaque élément pur contenu dans la même image. Pour ce faire, chacune de ces méthodes a sa propre stratégie. N-FINDR par exemple, cherche à déterminer les pixels formant le plus grand simplexe (en terme de volume) pouvant contenir l'ensemble des points de l'image considérée. Après une étape de réduction de dimension, cette méthode commence par sélectionner aléatoirement un ensemble de points dans le nuage de points engendré par les pixels de l'image (considérés comme étant des sommets candidats), puis va, dans une autre étape, chercher d'autres endmembers correspondant aux pixels qui maximisent le volume du simplexe recherché. Une autre méthode, appelée PPI, est réputée également dans le domaine, du fait qu'elle est utilisée dans un logiciel commercial très connu de traitement d'images en télédétection (le logiciel ENVI, pour "ENvironment for Visualizing Images"). Après une étape de réduction de dimension, cette dernière méthode effectue plusieurs projections de l'ensemble du nuage des points (correspondant aux données dans l'espace réduit) sur des vecteurs de norme unité générés aléatoirement (appelés "skewers"), et retient pour chaque projection réalisée les pixels ayant des valeurs extrêmes. Les pixels les plus purs recherchés correspondent aux points ayant le plus grand score (défini par le nombre de fois où un pixel a été retenu comme point extrême). Ces points représentent donc les endmembers les plus purs.

La méthode OSP quant à elle, recherche le pixel ayant la plus grande distance par rapport au nuage de points considéré. Ce pixel est retenu comme étant le premier endmember, puis cette méthode effectue une projection sur le plan orthogonal au vecteur défini précédemment et recherche encore une fois la distance maximum, correspondant au second endmember. Cette procédure est répétée jusqu'à l'identification de tous les endmembers. En d'autres termes, cette méthode s'intéresse à la distance maximum des pixels au niveau des sous-espaces engendrés par les endmembers identifiés précédemment [15]. Comme cette dernière, la méthode VCA est également basée sur une projection sur des sous-espaces orthogonaux avec comme différence par rapport à OSP, l'exploitation par VCA de l'hypothèse d'identification des pixels purs positionnés au niveau des sommets du simplexe engendré par les données [13]. Il est à préciser que cette méthode est considérée parmi les plus efficaces dans cette catégorie de méthodes.

La méthode SMACC est également très connue du fait de sa disponibilité dans le logiciel ENVI. A chaque étape, cette dernière permet l'estimation simultanée des endmembers et des fractions d'abondance correspondantes (au contraire de la majorité des méthodes réalisant le démélange, comme mentionné, en deux étapes indépendantes). Les spectres des endmembers sont estimés à travers les vecteurs des points dits "extrêmes" (définis comme étant des vecteurs ne pouvant être estimés par combinaison linéaire des autres vecteurs contenus dans l'image considérée). Dans la version qui tient compte des contraintes imposées par le type de données utilisées (Eqs. (3.7) et (3.8)), ces derniers vecteurs sont représentés par un cône convexe. La procédure retenue pour sélectionner ces vecteurs extrêmes repose sur une méthode de "Gram-Schmidt". Il est à noter par ailleurs, qu'une extension de cette méthode aux images multispectrales a été proposée dans [21].

Plus de détails concernant ce type de méthodes, ou bien d'autres méthodes existantes dans cette catégorie (non citées dans ce manuscrit), sont présentés dans l'article de J.M. Bioucas-Dias et al. [2] (et les références qui y sont citées). Par ailleurs, malgré leur efficacité dans la situation où l'on dispose de pixels purs, ces mêmes méthodes ne donnent évidemment pas le même résultat sur des images ne contenant pas de pixels purs [13]. En effet, l'hypothèse sur laquelle reposent ces méthodes n'est malheureusement pas applicable sur certaines images de télédétection dont la résolution spatiale est trop faible par exemple, pour qu'elles puissent contenir des pixels purs. Dans ce cas de figure, d'autres approches géométriques ont été proposées et qui n'utilisent pas cette hypothèse. Celles-ci sont présentées dans le paragraphe suivant.

### 3.3.2 Méthodes géométriques sans pixels purs

En s’inspirant de l’approche de minimisation du volume (ou MVT en anglais, pour “Minimum Volume Transform”) proposée par M.D. Craig [22], la majorité des méthodes développées dans cette catégorie recherchent à générer des endmembers virtuels (qui ne sont pas disponibles dans l’image considérée). En d’autres termes, cette approche consiste à minimiser le volume du simplexe contenant les données. Parmi les méthodes les plus connues, on peut citer :

- CCA (Convex Cone Analysis) développée par A. Ifarragurri et C.-I. Chang [23].
- ICE (Iterative Constrained Endmembers) développée par M. Berman et al. [24].
- MVC-NMF (Minimum Volume Constrained Non-negative Matrix Factorization) développée par L. Miao et H. Qi [25].
- MVSA (Minimum Volume Simplex Analysis) développée par J. Li et J.M. Bioucas-Dias [26].
- MVES (Minimum Volume Enclosing Simplex) développée par T.-H. Chan et al. [27].
- SISAL (Simplex Identification via Split Augmented Lagrangian) développée par J.M. Bioucas-Dias [28].

L’approche adoptée par ces méthodes est considérée comme étant un problème d’optimisation non convexe, et est ainsi plus difficile à résoudre par rapport aux approches présentées dans la catégorie précédente. Plus précisément, les méthodes de cette catégorie recherchent la matrice de mélange (contenant les spectres des endmembers) qui minimise le volume du simplexe formé par les colonnes de cette dernière. Pour ce faire, ici aussi, chacune de ces méthodes a sa propre stratégie. La méthode CCA par exemple, recherche à déterminer les points limitrophes de la région (ou cône) convexe contenant l’ensemble des points de l’image. En pratique, cette méthode estime les spectres des endmembers, représentés par les sommets de la région convexe en se basant sur les vecteurs propres de la matrice de corrélation de l’image, correspondant aux plus grandes valeurs propres (connaissant le nombre des endmembers de l’image). Il est à préciser que cette méthode adopte une approche similaire à celle proposée par M.D. Craig, qui est, comme mentionné ci-dessus, une méthode basée sur l’estimation des spectres des endmembers à partir des sommets du plus petit simplexe pouvant contenir ces données.

Une autre méthode de cette catégorie est celle appelée ICE. Après une étape de réduction de dimension, cette dernière minimise une fonction représentée par la distance euclidienne entre les données considérées et le produit des matrices  $\hat{R}$  et  $\hat{F}$  recherchées (conformément au modèle présenté dans (3.3)), à laquelle elle rajoute une contrainte liée à la distance entre les sommets du simplexe formé par les colonnes de la matrice  $\hat{R}$ . Cette dernière approche est similaire à ce qui a été proposé pour la méthode MVC-NMF. Ceci étant, le terme rajouté dans le problème d’optimisation de MVC-NMF est basé sur le volume du simplexe (et non pas sur la distance entre les sommets de ce dernier, qui a été utilisé dans ICE).

Plus récemment, d’autres méthodes ont été proposées dans cette catégorie, à savoir MVSA et SISAL. En s’inspirant de la méthode MVT, les auteurs de MVSA proposent de résoudre le problème d’optimisation considéré en utilisant des méthodes de programmation quadratique séquentielles (ou SQP en anglais, pour “Sequential Quadratic Programming”). Il est à noter que dans le souci d’éviter les minima locaux liés au problème d’optimisation, les auteurs effectuent une initialisation issue de la méthode VCA qui, rappelons-le, est une méthode basée sur la présence de pixels purs. Par ailleurs, et dans l’objectif d’augmenter la robustesse de cette méthode, les auteurs proposent dans le même article une version de cette méthode autorisant la violation de la contrainte de non-négativité et la remplacent par une autre contrainte plus souple. Cette



dernière est réalisée en rajoutant à la fonction d'optimisation utilisée dans la version de base, un terme de régularisation basé sur une fonction de type "hinge loss". Une autre stratégie a été proposée dans la méthode SISAL, qui utilise la même structure que cette dernière version de la méthode MVSA (en ce qui concerne l'initialisation ainsi que le remplacement de la contrainte de non négativité). Pour résoudre le problème d'optimisation, cette dernière méthode a recours à un algorithme de type Lagrangien augmenté.

Enfin, comme pour les méthodes citées ci-dessus, la méthode MVES recherche également le plus petit volume du simplexe pouvant contenir les données. Pour ce faire, et après une étape de réduction de dimension, les auteurs de cette méthode proposent une reformulation du problème non convexe d'optimisation proposé dans MVT, de manière à pouvoir le résoudre avec des méthodes de programmation linéaire. Par ailleurs, les auteurs proposent dans leur contribution, et sous la condition de présence de pixels purs dans l'image étudiée, une preuve de l'unicité de l'identification des vrais endmembers.

De la même façon que pour la catégorie précédente, plus de détails concernant ces méthodes, ou encore d'autres méthodes de la même catégorie (non citées dans ce manuscrit), sont présentés dans [2] (et les références qui y sont citées).

### 3.4 Application des méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) à l'imagerie spatiale

Les principales classes de méthodes de SAS ayant été présentées de manière générale dans le chapitre précédent, nous allons dans la section en cours citer quelques-unes d'entre elles appliquées tout particulièrement dans le domaine de la télédétection.

Au contraire des approches géométriques évoquées précédemment, celles présentées ci-dessous sont fondées sur des méthodes classiques de SAS :

Il s'agit d'abord des méthodes basées sur l'ACI, c.à.d. celles basées sur l'indépendance statistique des sources. Dans ce type de méthodes, l'obtention de la matrice de mélange et des sources, à partir des observations, et sans connaissance a priori du mélange considéré, constitue un avantage intéressant. Plusieurs propositions ont été présentées dans la littérature. A titre d'exemples, nous pouvons citer celle introduite par J. Bayliss et al. [29] utilisant une approche basée sur le Maximum de Vraisemblance (cette méthode repose sur un algorithme proposée par B.A. Pearlmutter et L. Parra, appelé cICA pour "contextual Independent Component Analysis" [30]). On peut également citer la méthode proposée par M. Lennon et al. [31], qui utilise une transformation en ondelettes avant de procéder à l'ACI. Une autre approche a également été proposée par C.-K. Kuan et G. Healey [32], utilisant l'ACI avec l'algorithme FastICA (à noter que dans cette approche, et au contraire des méthodes citées juste avant, les sources sont considérées comme étant des fractions d'abondance). On peut trouver dans la littérature plusieurs articles proposant un panorama plus complet de ces méthodes comme par exemple [33, 2].

Les méthodes reposant sur ce principe ont commencé à être présentées à partir de la fin des années 1990. Ceci étant, la majorité d'entre elles furent remises en cause par J.M.P. Nascimento et J.M. Bioucas-Dias dans un article, paru en 2005 [34]. Dans ce dernier, les auteurs attirent l'attention sur la dépendance des sources (fractions d'abondance) entre elles du fait des contraintes physiques imposées aux données de télédétection (3.8), et proposent une comparaison entre plusieurs algorithmes d'ACI. Par ailleurs, et en ce qui concerne les méthodes pour lesquelles les sources sont considérées comme étant des spectres de réflectance, l'hypothèse d'indépendance

statistique n'est également pas respectée du fait de la nature de ces spectres (dans certains cas très corrélés, e.g. différents types de végétation ...). Il est à noter que la plupart des méthodes d'ACI, utilisées dans le domaine, sont celles basées sur la non-gaussianité comme par exemple FastICA, les cumulants (JADE) ou bien celles basées sur la minimisation de l'information mutuelle [34].

Pour suivre la logique du chapitre précédent, nous citons la deuxième classe d'approches exploitant cette fois-ci la non-négativité des données, à savoir les méthodes basées sur la NMF. Comme mentionné précédemment, l'inconvénient majeur de ce type d'approches [35, 36] réside dans la non-unicité de la factorisation considérée. Afin d'éviter ce problème, en plus de celui de l'initialisation, plusieurs approches ont été proposées, faisant appel à des hypothèses supplémentaires liées aux a priori éventuels sur les sources et/ou la matrice de mélange. Une méthode très connue dans cette catégorie, mais pouvant être considérée comme une méthode géométrique aussi - comme indiqué dans la section précédente - est la méthode MVC-NMF. Cette dernière utilise une contrainte supplémentaire dans le problème d'optimisation de la NMF qui est basée sur le volume du simplexe engendré par les données.

Dans cette catégorie de méthodes, on peut citer également les travaux de C-Y. Liou et K-D.O. Yang [37], proposant une initialisation de la NMF avec le résultat obtenu à partir d'une classification (cette étape est effectuée avec la méthode fuzzy c-means), ou bien encore les travaux de V. Pauca et al. [38], qui proposent dans le cadre d'une application astrophysique, d'avoir recours à une contrainte supplémentaire de lissage. Une autre approche a été récemment proposée par X. Lu et al. [39]. Pour résoudre le problème d'optimisation, cette dernière méthode utilise une double contrainte (d'une part une contrainte liée à la parcimonie, et d'autre part une contrainte liée à l'information structurelle relative aux données considérées).

Enfin, comme mentionné dans le chapitre précédent, et pour plus de détails à ce sujet, il est possible de se référer à [40]. Il est également possible de consulter [41], dans lequel il est proposé un résumé intéressant de la majorité des méthodes reposant sur la NMF (voir également les références citées dans [39]).

Dans notre cas de figure, dans le prochain chapitre nous proposons la combinaison des deux approches sus-citées (ACI, NMF), et essentiellement pour en éviter les inconvénients cités, nous nous focaliserons sur une modification d'une des méthodes d'ACI en utilisant les contraintes physiques imposées aux données (3.8), à l'effet d'utiliser ses sorties comme valeurs initiales d'un algorithme classique de NMF [35, 36].

La troisième classe de méthodes est celles basées sur l'Analyse en Composantes Parcimonieuses. Récemment plusieurs approches ont été proposées dans cette catégorie. On peut citer, à ce titre l'article de M.-D. Iordache et al. [42] présentant un résumé intéressant de quelques-unes d'entre elles. Ces méthodes utilisent une approche dite semi-supervisée, c.à.d. reposant sur la disponibilité de certaines bibliothèque spectrales (composées de divers spectres de matériaux naturels, mesurés au niveau du sol par des spectroradiomètres, comme par exemple la bibliothèque spectrale U.S.G.S [43] contenant plus de 1300 spectres, ou bien la bibliothèque spectrale AGC [44]). En général, et en considérant le nombre des endmembers présents dans un pixel mélangé largement inférieur au nombre des spectres disponibles dans les bibliothèques spectrales considérées, ces méthodes vont essayer d'imposer la parcimonie de la solution. Ceci est réalisé par la minimisation d'un critère sous contraintes (un des critères les plus utilisés, concerne la norme  $\ell^1$ ). Pour plus de détails concernant ces méthodes, il est possible de consulter [45, 41, 2] et les références qui y sont citées.

Nous portons un intérêt marqué à ce type d’approches (en ce qui concerne la parcimonie en général) et tout particulièrement à une partie d’entre elles - qui a été détaillée dans le Chapitre 2 - à savoir celles fondées sur l’hypothèse de faibles conditions de parcimonie conjointe [46]. En effet, le même type d’approche que dans [47] a été appliqué à des images spatiales multispectrales, et nous proposons dans cette section de décrire cette méthode de démélange, appelée “2D-corr-NLS” [4]. L’hypothèse principale sur laquelle repose cette méthode est l’existence au niveau de l’image considérée de “zones mono-sources” c.à.d. des zones contenant une seule source. Les hypothèses et définitions, utilisées dans cette méthode, sont présentées ci-dessous [4, 48] :

– **Définition 1 :**

*Un matériau pur est dit “isolé” dans une “zone d’analyse”<sup>16</sup> si seul ce matériau pur est présent dans cette zone d’analyse, c.à.d. si seul ce matériau pur donne un vecteur non nul  $\mathbf{f}_m(\Omega)$  formé des  $f_m(n)$  avec  $n \in \Omega$  (si on considère  $\Omega$  comme un ensemble des indices des pixels associés).*

– **Définition 2 :**

*Un matériau pur est dit “accessible” dans le domaine spatial s’il existe au moins une zone d’analyse dans laquelle il est isolé.*

– **Hypothèse 1 :**

*Chaque matériau pur est accessible dans le domaine spatial.*

Dans le cas d’imagerie de télédétection, cette hypothèse de parcimonie est **équivalente à la présence d’au moins une zone mono-source contenant seulement des pixels purs pour chaque matériau pur**. Selon les auteurs, cette hypothèse est réaliste pour certaines images à haute résolution spatiale, contenant des zones étendues pour les différentes classes d’occupation des sols. Compte tenu de (3.8), l’abondance de ce matériau pur est égale à un dans cette zone.

– **Hypothèse 2 :**

*Dans chaque zone d’analyse  $\Omega$ , les vecteurs non nuls  $\mathbf{f}_m(\Omega)$  sont linéairement indépendants (s’il existe au moins deux de ces vecteurs dans une zone d’analyse).*

L’intérêt de cette hypothèse est par exemple l’exclusion du cas où deux sources sont constantes et non-nulles sur chaque zone considérée qui pourrait engendrer de fausses détections des zones mono-sources.

– **Hypothèse 3 :**

*Le modèle de séparation est localement (sur)-déterminé, c.à.d.  $L \geq M(\Omega)$  dans n’importe quelle zone d’analyse  $\Omega$ , où  $M(\Omega)$  est le nombre de matériaux purs présents dans la zone d’analyse  $\Omega$ .*

Pour les images hyperspectrales, cette hypothèse est dans tous les cas respectée car  $L$  est toujours supérieur à  $M(\Omega)$ .

– **Hypothèse 4 :**

*Dans chaque zone d’analyse  $\Omega$ , la sous-matrice composée des colonnes de la matrice de mélange, et correspondant aux matériaux purs présents dans la zone, est de rang plein.*

La structure générale de cette méthode peut être résumée en trois étapes principales :

---

16. Dans cette méthode les auteurs divisent les données observées en petites zones spatiales à deux dimensions, appelées “zones d’analyse”, constituées de pixels adjacents. Ces zones peuvent avoir n’importe quelle forme et sont notées “ $\Omega$ ”.

- Détection de toutes les zones d'analyse “mono-sources” disponibles depuis l'image considérée (observation).
- Estimation des colonnes de la matrice de mélange à partir de chacune des zones mono-sources détectées dans l'étape précédente.
- Extraction des sources recherchées (les fractions d'abondance) sous la contrainte de non-négativité.

La **première** étape consiste à détecter toutes les zones mono-sources en utilisant un critère basé sur la corrélation. Pour plus de détails concernant ce critère, il est possible de consulter [4, 48] (et les références qui y sont citées).

Dans la **deuxième** étape, et donc après détection de toutes les zones mono-sources, les auteurs calculent une estimation des colonnes candidates de la matrice de mélange grâce à la contrainte imposée de somme à un (3.8). En effet, dans chaque zone où seule une source est active, la fraction d'abondance de cette source vaut “un”, alors que le reste est égal à “zéro”. La médiane, composante par composante, de tous les vecteurs observés associés aux pixels présents dans cette zone nous donne alors une estimation d'une des colonnes de la matrice de mélange. On obtient donc pour chacune des sources un ensemble d'estimations de la colonne associée de la matrice de mélange (un ensemble contient une ou plusieurs estimées par colonne de la matrice de mélange). Il faudra donc combiner dans chaque ensemble les estimées obtenues pour avoir en sortie une estimation unique par colonne de la matrice de mélange. Pour cela, on procède à une classification de toutes ces colonnes estimées (de la matrice de mélange). Ceci est réalisé avec une méthode de clustering, par exemple *k-means*. Par ailleurs, le nombre de clusters nécessaires pour ce type de méthodes est estimé automatiquement en utilisant un indice de validité (ou bien “validity index”, en anglais). Plusieurs indices de validité du clustering sont proposés dans la littérature. Dans cette méthode, les auteurs utilisent celui proposé dans [49]. En sortie de cette étape, toutes les  $M$  colonnes de la matrice de mélange sont estimées.

Dans une **dernière** étape, les auteurs procèdent à l'extraction des  $M$  sources spatiales (les fractions d'abondance) en utilisant une méthode des moindres carrés avec contrainte de non-négativité, séparément sur chaque pixels de l'image, ou bien la Factorisation en Matrices Non-négatives.

Pour terminer cette section, il est à préciser que l'approche détaillée ci-dessus est également applicable pour certaines images hyperspectrales dont la résolution spatiale permettrait le respect de l'hypothèse (1) ci-dessus énoncée. Dans ce dernier cas de figure (images hyperspectrales) cette méthode de démixage est utilisée avec moins de restrictions que pour le cas multispectral. En effet, l'hypothèse (3) liée au fait que le nombre de bandes spectrales est supérieur ou égal au nombre de sources présentes dans les zones d'analyse considérées, est toujours vérifiée.

Par ailleurs, exception faite des trois catégories de méthodes de SAS citées plus haut (ACI, NMF, Parcimonie), il est important de faire référence à d'autres approches basées sur les méthodes bayésiennes. A titre d'exemple on peut citer [50] ou bien [12]. Pour avoir une vision plus complète sur les autres approches bayésiennes, il est possible de consulter [2] ainsi que les références qui y sont citées.

### 3.5 Conclusion

Géométriquement parlant, les méthodes proposées recherchent les sommets du simplexe formé par les colonnes de la matrice de mélange. Dans la section relative aux méthodes géométriques, on a présenté les deux catégories de méthodes existantes, à savoir : (1) celles utilisant les pixels purs dans l'image, et (2) celles n'utilisant pas les pixels purs dans l'image (pour chacun des endmembers considérés). Dans chacune de ces catégories de méthodes on a vu plusieurs stratégies utilisées pour atteindre cet objectif d'identification des spectres des endmembers. Par ailleurs, nous avons présenté quelques approches basées sur des méthodes de SAS, citées dans le chapitre précédent, à savoir l'ACI, la NMF et l'ACPa. On rappelle ici également qu'il est possible de consulter pour plus de détails à ce sujet les nombreux articles de revue notamment [1] et [2] présentant un état de l'art très complet lié au domaine de démélange, ou bien encore, plus récemment les travaux présentés dans la revue *IEEE Signal Processing magazine* [41] proposant un descriptif intéressant des méthodes reposant sur des propriétés géométriques (en particulier la géométrie convexe), ainsi que les nombreux points communs existant entre les méthodes de traitement du signal et celles du démélange spectral.

Dans les prochains chapitres, nous proposons des méthodes de démélange spectral qui suivent la même orientation qui découle de [41], puisque ces méthodes sont fondées sur les méthodes de SAS. Conformément au plan du manuscrit, nous commençons par définir la première méthode proposée, qui est basée sur la combinaison de deux grandes classes de méthodes de SAS, à savoir l'ACI et la NMF. Ensuite, nous proposons une autre approche, différente de la première car basée sur la parcimonie combinée avec des propriétés géométriques, permettant la détection des spectres des endmembers via les zones de l'image contenant deux sources. L'hypothèse sur laquelle repose cette dernière méthode est, à notre humble avis, très réaliste car d'une part, on n'a pas besoin de pixels purs dans l'image étudiée, et d'autre part, notre méthode non supervisée, estime les spectres des endmembers sans avoir recours à une bibliothèque spectrale, ce qui n'est pas le cas pour certaines méthodes semi-supervisées, fondées sur la parcimonie abordées ci-dessus (voir par exemple [42]).

# Bibliographie

- [1] N. Keshava and J.F. Mustard, "Spectral unmixing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, no. 1, pp. 44–57, January 2002.
- [2] J.M. Bioucas-Dias, A. Plaza, N. Dobigeon, M. Parente, Q. Du, P. Gader, and J. Chanussot, "Hyperspectral unmixing overview : Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 5, no. 2, pp. 354–379, April 2012.
- [3] N. Dobigeon, J.-Y. Tournieret, C. Richard, J.C.M. Bermudez, S. McLaughlin, and A.O. Hero, "Nonlinear unmixing of hyperspectral images : Models and algorithms," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, no. 1, pp. 82–94, January 2014.
- [4] M.S. Karoui, Y. Deville, S. Hosseini, and A. Ouamri, "Blind spatial unmixing of multispectral images : New methods combining sparse component analysis, clustering and non-negativity constraints," *Pattern Recognition*, vol. 45, no. 12, pp. 4263–4278, December 2012.
- [5] I. Meganem, P. Deliot, X. Briottet, Y. Deville, and S. Hosseini, "Linear-quadratic mixing model for reflectances in urban environments," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, no. 1, pp. 544–558, January 2014.
- [6] M.O. Smith, P.E. Johnson, and J.B. Adam, "Quantitative determination of mineral types and abundances from reflectance spectra using principal component analysis," *Journal of Geophysical Research*, vol. 90, pp. 797–804, February 1985.
- [7] A.A. Green, M. Berman, P. Switzer, and M.D. Craig, "A transformation for ordering multispectral data in terms of image quality with implications for noise removal," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 26, no. 1, pp. 65–74, January 1988.
- [8] C-I. Chang and Q. Du, "Estimation of number of spectrally distinct signal sources in hyperspectral imagery," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 42, no. 3, pp. 608–619, March 2004.
- [9] J.M. Bioucas-Dias and J.M.P. Nascimento, "Hyperspectral subspace identification," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 46, no. 8, pp. 2435–2445, August 2008.
- [10] C-I. Chang and D.C. Heinz, "Constrained subpixel target detection for remotely sensed imagery," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 38, no. 3, pp. 1144–1159, May 2000.
- [11] D.C. Heinz and C-I. Chang, "Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, no. 3, pp. 529–545, March 2001.
- [12] N. Dobigeon, S. Moussaoui, J.-Y. Tournieret, and C. Carteret, "Bayesian separation of spectral sources under non-negativity and full additivity constraints," *Signal Processing*, vol. 89, pp. 2657–2669, May 2009.

- [13] J. Plaza, E.M.T. Hendrix, I. Garcia, G. Martin, and A. Plaza, "On endmember identification in hyperspectral images without pure pixels : A comparison of algorithms," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 42, no. 2-3, pp. 163–175, February 2012.
- [14] J.M. Bioucas-Dias and A. Plaza, "An overview on hyperspectral unmixing : Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches," in *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS / Vancouver, Canada)*, 2011, pp. 1135–1138.
- [15] P. Honeine, C. Richard, and N.H. Nguyen, "Approches géométriques pour l'estimation des fractions d'abondance en traitement de données hyperspectrales : Extensions aux modèles de mélange non linéaires," *Traitement du Signal*, vol. 30, no. 1-2, pp. 61–86, 2013.
- [16] M.E. Winter, "N-findr : an algorithm for fast autonomous spectral end-member determination in hyperspectral data," in *SPIE conference on Imaging Spectrometry V (Denver, Colorado, USA)*, 1999, vol. 3753, pp. 266–275.
- [17] J.W. Boardman, F.A. Kruse, and R.O. Green, "Mapping target signatures via partial unmixing of aviris data," in *the Fifth JPL Airborne Earth Science Workshop*, 1995, vol. 95, pp. 23–26.
- [18] J.C. Harsanyi and C-I. Chang, "Hyperspectral image classification and dimensionality reduction : An orthogonal subspace projection approach," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 32, no. 4, pp. 779–785, July 1994.
- [19] J.M.P. Nascimento and J.M. Bioucas-Dias, "Vertex component analysis : A fast algorithm to unmix hyperspectral data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, no. 4, pp. 898–910, April 2005.
- [20] J. Gruninger, A.J. Ratkowski, and M.L. Hoke, "The sequential maximum angle convex cone (smacc) endmember model," in *Algorithms for Multispectral, Hyperspectral and Ultraspectral Imagery*. SPIE, 2004, vol. 5425, no. 1.
- [21] J. Gruninger, A.J. Ratkowski, and M.L. Hoke, "The extension of endmember extraction to multispectral scenes," in *Algorithms for Multispectral, Hyperspectral and Ultraspectral Imagery*. SPIE, 2004, vol. 5425, no. 2.
- [22] M.D. Craig, "Minimum-volume transforms for remotely sensed data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 32, no. 3, pp. 542–552, May 1994.
- [23] A. Ifarragurri and C-I. Chang, "Multispectral and hyperspectral image analysis with convex cones," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 37, no. 2, pp. 756–770, March 1999.
- [24] M. Berman, H. Kiiveri, R. Lagerstrom, A. Ernst, R. Dunne, and J.F. Huntington, "Ice : a statistical approach to identifying endmembers in hyperspectral images," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 42, no. 10, pp. 2085–2095, October 2004.
- [25] L. Miao and H. Qi, "Endmember extraction from highly mixed data using minimum volume constrained nonnegative matrix factorization," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 45, no. 3, pp. 765–777, March 2007.
- [26] J. Li and J.M. Bioucas-Dias, "Minimum volume simplex analysis : a fast algorithm to unmix hyperspectral data," in *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS / Boston, Massachusetts, USA)*, 2008, vol. 3, pp. 250–253.
- [27] T.H. Chan, C.Y. Chi, Y.M. Huang, and W.K. Ma, "A convex analysis-based minimum-volume enclosing simplex algorithm for hyperspectral unmixing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 11, pp. 4418–4432, November 2009.

- 
- [28] J.M. Bioucas-Dias, "A variable splitting augmented lagrangian approach to linear spectral unmixing," in *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing Evolution in Remote Sensing (WHISPERS / Grenoble, France)*, 2009.
  - [29] J. Bayliss, J.A. Gualtieri, and R.F. Crompt, "Analyzing hyperspectral data with independent component analysis," in *SPIE AIPR Workshop*, 1997, vol. 9, pp. 133–143.
  - [30] B.A. Pearlmutter and L. Parra, "A context-sensitive generalization of ica," in *International Conference on Neural Information Processing*, 1996.
  - [31] M. Lennon, G. Mercier, M.C. Mouchot, and L. Hubert-Moy, "Spectral unmixing of hyperspectral images with the independent component analysis and wavelet packets," in *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS / Sydney, Australia)*, 2001, vol. 6, pp. 2896–2898.
  - [32] C-Y. Kuan and G. Healey, "Using source separation methods for endmember selection," in *SPIE*, 2002, vol. 4725, pp. 10–17.
  - [33] M. Parente and A. Plaza, "Survey of geometric and statistical unmixing algorithms for hyperspectral images," in *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing Evolution in Remote Sensing (WHISPERS / Reykjavik, Iceland)*, 2010, pp. 1–4.
  - [34] J.M.P. Nascimento and J.M. Bioucas-Dias, "Does independent component analysis play a role in unmixing hyperspectral data?," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, no. 1, pp. 175–187, January 2005.
  - [35] D.D. Lee and H.S. Seung, "Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization," *Nature*, vol. 401, pp. 788–791, 1999.
  - [36] D.D. Lee and H.S. Seung, "Algorithms for non-negative matrix factorization," *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 13, pp. 556–562, 2001.
  - [37] C-Y. Liou and K-D.O. Yang, "Unsupervised classification of remote sensing imagery with non-negative matrix factorization," in *International Conference on Neural Information Processing (ICONIP / Taipei, Taiwan)*, 2005.
  - [38] V.P. Pauca, J. Piper, and R.J. Plemmons, "Nonnegative matrix factorization for spectral data analysis," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 416, pp. 29–47, 2006.
  - [39] X. Lu, H. Wu, and Y. Yuan, "Double constrained nmf for hyperspectral unmixing," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, pp. 1–13, May 2013.
  - [40] A. Cichocki, R. Zdunek, A. H. Phan, and S-I. Amari, *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations : Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation*, John Wiley and Sons, Chichester, United Kingdom, 2009.
  - [41] W.-K. Ma, J.M. Bioucas-Dias, T.-H. Chan, N. Gillis, P. Gader, A.J. Plaza, A. Ambikapathi, and C.-Y. Chi, "A signal processing perspective on hyperspectral unmixing : insights from remote sensing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, no. 1, pp. 67–81, January 2014.
  - [42] M.-D. Iordache, A. Plaza, and J.M. Bioucas-Dias, "Recent developments in sparse hyperspectral unmixing," in *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS / Honolulu, Hawaii, USA)*, 2010, pp. 1281–1284.
  - [43] R. N. Clark, G. A. Swayze, R. Wise, E. Livo, T. Hoefen, R. Kokaly, and S. J. Sutley, "USGS digital spectral library splib06a," in *U.S. Geological Survey, Digital Data Series 231*, <http://speclab.cr.usgs.gov/spectral.lib06>, 2007.
  - [44] "http://www.tec.army.mil/hypercube," .



- [45] M.-D. Iordache, J.M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, “Sparse unmixing of hyperspectral data,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, no. 6, pp. 2014–2039, June 2011.
- [46] G.R. Naik and W. Wang, *Blind Source Separation : Advances in Theory, Algorithms and Applications. Chapter 6, Sparse component analysis : a general framework for linear and nonlinear blind source separation and mixture identification (pp. 151-196)*, Springer, 2014.
- [47] Y. Deville and M. Puigt, “Temporal and time-frequency correlation-based blind source separation methods. part i : determined and underdetermined linear instantaneous mixtures,” *Signal Processing*, vol. 87, no. 3, pp. 374–407, March 2007.
- [48] M.S. Karoui, *Méthodes de séparation aveugle de sources et application à la télédétection spatiale*, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2012.
- [49] D.J. Kim, Y.W. Park, and D.J. Park, “A novel validity index for determination of the optimal number of clusters,” in *IEICE Transactions on Information and Systems*, E84-D(2), 2001, pp. 281–285.
- [50] S. Moussaoui, , C. Carteret, D. Brie, and A. Mohammad-Djafari, “Bayesian analysis of spectral mixture data using markov chain monte carlo methods,” *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 81, pp. 137–148, January 2006.

## Chapitre 4

# Démélange d'images hyperspectrales par NMF initialisée avec une ACI modifiée

### Contents

---

|            |                                            |           |
|------------|--------------------------------------------|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Introduction</b>                        | <b>66</b> |
| <b>4.2</b> | <b>Limites de l'ACI et de la NMF</b>       | <b>67</b> |
| <b>4.3</b> | <b>Approche proposée (modifICA-NMF)</b>    | <b>68</b> |
| 4.3.1      | Modification de l'ACI                      | 68        |
| 4.3.2      | Elimination de l'indétermination d'échelle | 70        |
| 4.3.3      | Initialisation de la NMF                   | 73        |
| <b>4.4</b> | <b>Résultats expérimentaux</b>             | <b>74</b> |
| 4.4.1      | Critères de performances                   | 75        |
| 4.4.2      | Test 1                                     | 75        |
| 4.4.3      | Test 2                                     | 78        |
| 4.4.4      | Test 3                                     | 81        |
| 4.4.5      | Test 4                                     | 87        |
| 4.4.6      | Tests effectués sur données réelles        | 89        |
| <b>4.5</b> | <b>Conclusion</b>                          | <b>93</b> |

---

## 4.1 Introduction

Il a été présenté dans le Chapitre 2 plusieurs classes de méthodes de SAS, parmi lesquelles l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI) et la Factorisation en Matrices Non-négatives (NMF). Ces dernières méthodes ont également été abordées dans la Section 3.4 en rapport avec le domaine de la télédétection. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'adaptation de ce type de méthodes au démélange hyperspectral, qui comme déjà mentionné, consiste à identifier, à partir des spectres de pixel mélangés, un ensemble de spectres de matériaux purs (ou endmembers) contenus dans une scène et un ensemble de fractions d'abondance pour chaque pixel.

Comme abordé précédemment, l'ACI fait partie des méthodes les plus étudiées en SAS (voir par exemple [1]). Sous la contrainte d'indépendance des sources, ce type de méthodes peut fournir une solution théorique unique à des indéterminations de permutation et d'échelle près. Cependant, cette contrainte d'indépendance n'est pas respectée pour les données de télédétection [2]. Par ailleurs, lorsque les sources et la matrice de mélange sont non-négatives, comme cela est le cas pour les images de télédétection, les méthodes reposant sur des contraintes de non-négativité peuvent être utilisées, en particulier les méthodes basées sur la factorisation en matrices non négatives (NMF). Ceci étant, les méthodes NMF standard n'offrent pas la garantie de fournir une solution unique, et leur point de convergence dépend généralement de leur initialisation [3].

Dans cette partie du manuscrit, nous proposons donc une nouvelle approche de démélange non-supervisée, appelée modifICA-NMF [4], qui combine une version modifiée de l'ACI avec la NMF. Notre approche permet d'éviter les limitations qui se produisent lors de l'utilisation seule d'une des méthodes d'ACI ou de NMF. En effet, nous allons montrer comment les contraintes physiques de notre problème peuvent être utilisées pour éliminer une partie des indéterminations liées à l'ACI et fournir une première approximation des spectres de endmembers et des fractions d'abondance associées. Ces approximations sont ensuite utilisées pour initialiser un algorithme de NMF, avec pour objectif de les améliorer.

Nous rappelons que le modèle utilisé dans notre étude est de type linéaire, et ainsi après vectorisation des dimensions spatiales, les réflectances non-négatives observées dans la  $\ell^{\text{ème}}$  bande spectrale, pour un pixel donné  $n$  sont exprimées comme suit [5, 6] :

$$x_\ell(n) = \sum_{m=1}^M r_{\ell m} f_m(n) \quad \forall n \in \{1 \cdots N\}, \ell \in \{1 \cdots L\}. \quad (4.1)$$

On rappelle également les contraintes de non-négativité et d'additivité suivantes :

$$f_m(n) \geq 0, \quad \forall \begin{matrix} m \in \{1 \cdots M\} \\ n \in \{1 \cdots N\} \end{matrix}, \quad (4.2)$$

$$r_{\ell m} \geq 0, \quad \forall \begin{matrix} m \in \{1 \cdots M\} \\ \ell \in \{1 \cdots L\} \end{matrix}, \quad (4.3)$$

$$\sum_{m=1}^M f_m(n) = 1 \quad \forall n \in \{1 \cdots N\}. \quad (4.4)$$

## 4.2 Limites de l'ACI et de la NMF

Lorsque les observations sont des combinaisons linéaires de sources statistiquement indépendantes, nous avons vu précédemment que l'ACI peut être utilisée pour réaliser la SAS [1]. Pour ce qui nous concerne, et particulièrement en télédétection, l'ACI ne peut être appliquée de manière classique pour extraire les  $M$  sources considérées dans l'image, ceci principalement en raison de ce qui suit :

- (i) Du fait des contraintes physiques imposées aux données de télédétection (4.4), les méthodes d'ACI, appliquées dans le cas de sources spatiales (fractions d'abondance), furent remises en cause par Nascimento et Bioucas-Dias [2]. En effet, l'hypothèse principale sur laquelle reposent les méthodes d'ACI n'est plus respectée car dans ce cas, les sources  $f_m$  ne sont pas statistiquement indépendantes.
- (ii) Un autre problème peut également être cité concernant les indéterminations d'échelle inhérentes à l'ACI. En effet, les fractions d'abondance obtenues, en sortie d'un algorithme d'ACI, ne sont pas physiquement interprétables.

Pour surmonter ces limitations, nous allons montrer dans ce qui suit qu'une utilisation non conventionnelle de l'ACI peut nous donner une estimation des signaux sources et de la matrice de mélange sans indéterminations d'échelle.

D'autre part, comme mentionné dans les Chapitres 2 et 3, la NMF [3] vise à obtenir, à partir d'une matrice d'observation  $X$  composée d'éléments non-négatifs, deux autres matrices également composées d'éléments non-négatifs  $\hat{R}$  et  $\hat{F}$ , de manière à ce que :

$$X \approx \hat{R}\hat{F}, \quad (4.5)$$

avec  $X \in \mathbb{R}_+^{L \times N}$ ,  $\hat{R} \in \mathbb{R}_+^{L \times M}$ ,  $\hat{F} \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$  et  $M < \min(L, N)$ .

Dans la majorité des méthodes de NMF existantes, la factorisation est effectuée en minimisant une fonction objective (ou fonction coût) grâce à une mise à jour appliquée aux composantes estimées  $\hat{R}$  et  $\hat{F}$ . Pour notre cas d'étude, nous avons choisi la version de mise à jour consistant à minimiser la norme de Frobenius de la différence entre  $X$  et le produit des matrices  $\hat{R}$  et  $\hat{F}$  [7]. La mise à jour en question est définie comme suit :

$$D_F(X, \hat{R}\hat{F}) = \frac{1}{2} \left\| X - \hat{R}\hat{F} \right\|_F^2. \quad (4.6)$$

Cette fonction est minimisée en utilisant les règles de mise à jour multiplicatives de Lee et Seung [7, 3] définies par :

$$\hat{F}_{mn} \leftarrow \hat{F}_{mn} \frac{(\hat{R}^T X)_{mn}}{(\hat{R}^T \hat{R} \hat{F})_{mn}}, \quad (4.7)$$

$$\hat{R}_{\ell m} \leftarrow \hat{R}_{\ell m} \frac{(X \hat{F}^T)_{\ell m}}{(\hat{R} \hat{F} \hat{F}^T)_{\ell m}}. \quad (4.8)$$

Pour rappel, les inconvénients majeurs de ce type de méthode sont résumés comme suit :

- (i) La non-unicité de la factorisation.

(ii) Différentes initialisations aléatoires peuvent conduire à des résultats différents.

Afin d'éviter ces problèmes, plusieurs approches ont été proposées faisant appel à des hypothèses supplémentaires liées aux a priori éventuels sur les sources et/ou la matrice de mélange. On peut citer à titre d'exemple certaines d'entre elles utilisant des contraintes de parcimonie [3], ou bien d'autres, reposant sur des contraintes géométriques (plus précisément sur le volume du simplexe engendré par les données), comme effectué dans la méthode MVC-NMF [8]. Dans la section suivante, nous proposons une approche alternative en vue de fournir une initialisation appropriée de la NMF.

### 4.3 Approche proposée (modifICA-NMF)

La discussion présentée ci-dessus aborde les difficultés rencontrées pour résoudre le problème de démélange en utilisant seulement l'une des méthodes d'ACI ou de NMF. Nous proposons dans la section en cours une nouvelle approche combinant ces deux méthodes. Cette dernière est composée des trois étapes suivantes :

- (i) Utilisation, dans un premier temps, d'une ACI standard permettant l'obtention de  $(M - 1)$  des  $M$  sources et d'une partie de la matrice de mélange à des indéterminations près.
- (ii) Elimination de l'indétermination d'échelle, et estimation de la  $M^{\text{ème}}$  source et de la  $M^{\text{ème}}$  colonne de la matrice de mélange non estimées en étape (i).  
Ces deux premières étapes seront considérées ci-après comme étant notre **ACI modifiée (qu'on appellera ci-dessous "modifICA")**.
- (iii) Utilisation des estimations obtenues à partir de l'étape précédente (les  $M$  sources et la matrice de mélange) pour initialiser une méthode classique de NMF.

Notre approche consiste donc à éviter le problème de non-unicité de la NMF en l'initialisant avec le résultat d'une extension non conventionnelle de l'ACI.

#### 4.3.1 Modification de l'ACI

La première étape de l'approche proposée est basée sur l'ACI. Plus particulièrement, nous utilisons dans le cadre de cette étude, la version à base de kurtosis de l'algorithme FastICA, qui pour rappel, est une méthode basée sur la "maximisation de la non-gaussianité" (voir Chapitre 2 du manuscrit ou bien [1]). Dans cette étape, on va d'abord ré-écrire le modèle linéaire en utilisant seulement  $(M - 1)$  sources parmi les  $M$  sources considérées dans le mélange (4.1), et en tenant compte du facteur d'échelle engendré par ce type de méthodes.

L'idée principale retenue dans notre démarche est de *supposer l'existence de  $(M - 1)$  sources statistiquement indépendantes, parmi les  $M$  sources considérées dans le mélange (4.1)*.

En raison de la contrainte de somme à un (4.4), seules  $(M - 1)$  sources peuvent être *linéairement* indépendantes, parmi toutes les  $M$  sources présentes dans (4.1).

En pratique, dans le domaine de la télédétection, ces  $(M - 1)$  sources ont souvent une dépendance *statistique* limitée. On peut citer, à titre d'exemple, le scénario d'une scène naturelle de

télédétection contenant  $M$  sources, parmi lesquelles  $(M - 1)$  classes de végétation ont des distributions spatiales modérément dépendantes, et où le reste de la scène (la  $M^{\text{ème}}$  classe) représente le sol nu. Dans ce cas de figure, le phénomène *libre* est représenté par les fractions d'abondance des  $(M - 1)$  classes de végétation, le reste du sol subissant leur occupation.

A ce titre, nous allons **dans cette première étape de l'approche proposée**, utiliser une méthode d'ACI pour extraire ces  $(M - 1)$  composantes supposées être indépendantes, fournissant les premières approximations des  $(M - 1)$  sources. L'hypothèse d'indépendance des  $(M - 1)$  sources n'étant pas tout à fait réaliste, on va essayer par la suite d'améliorer ces estimées de sources dans les prochaines étapes.

Plus précisément, en raison de (4.4), et en omettant l'indice de pixel  $n$ , l'éq. (4.1) donne :

$$\begin{aligned} x_l &= r_{l1}f_1 + \dots + r_{l(M-1)}f_{M-1} + r_{lM}(1 - (\sum_{m=1}^{M-1} f_m)) \\ &= (r_{l1} - r_{lM})f_1 + \dots + (r_{l(M-1)} - r_{lM})f_{M-1} + r_{lM}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

où les indices 1 à  $M$  sont assignés dans un ordre arbitraire aux matériaux purs présents dans la scène considérée.

A ce niveau, il est à noter que la modélisation du mélange linéaire tel que présenté ci-dessus (4.9), a déjà été examinée dans [9], mais les auteurs n'expliquent pas comment reconstruire les sources réelles et la matrice de mélange à partir de ce modèle. Par la suite on va essayer de répondre à cette problématique comme suit :

Soient  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{M-1})$  un ensemble de  $(M - 1)$  facteurs d'échelle arbitraires. Dans ce cas, l'éq. (4.9) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$x_l = \frac{r_{l1} - r_{lM}}{\alpha_1} \alpha_1 f_1 + \dots + \frac{r_{l(M-1)} - r_{lM}}{\alpha_{M-1}} \alpha_{M-1} f_{M-1} + r_{lM}. \quad (4.10)$$

Dans ce qui suit, les versions centrées de  $x_l$  et  $f_m$  sont notées (respectivement) :

$$\begin{aligned} \bar{x}_l &= x_l - \mu_{x_l} \\ \bar{f}_m &= f_m - \mu_{f_m}, \end{aligned}$$

où  $\mu_{x_l}$  et  $\mu_{f_m}$  représentent respectivement les moyennes spatiales de  $x_l$  et  $f_m$ . Ainsi, l'éq. (4.10) donne alors :

$$\bar{x}_l = \frac{r_{l1} - r_{lM}}{\alpha_1} \alpha_1 \bar{f}_1 + \dots + \frac{r_{l(M-1)} - r_{lM}}{\alpha_{M-1}} \alpha_{M-1} \bar{f}_{M-1}. \quad (4.11)$$

En raison des indéterminations, lors de l'application de l'ACI, effectuée pour extraire les  $(M - 1)$  composantes pures à partir des  $\bar{x}_l$ , nous obtenons idéalement les différences des coefficients de mélange notées  $(r_{lm} - r_{lM})$  et les sources centrées  $\bar{f}_m$  (avec l'indice  $m \in \{1, \dots, M - 1\}$ ) à des facteurs d'échelle inconnus près (définis ci-dessus). Cela revient à dire que nous obtenons idéalement, à la sortie d'un algorithme d'ACI (avec une numérotation arbitraire des sources), ce qui suit :

$$R^* = \begin{bmatrix} \frac{r_{11} - r_{1M}}{\alpha_1} & \dots & \frac{r_{1(M-1)} - r_{1M}}{\alpha_{M-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{r_{L1} - r_{LM}}{\alpha_1} & \dots & \frac{r_{L(M-1)} - r_{LM}}{\alpha_{M-1}} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

et

$$F^* = \begin{bmatrix} \alpha_1 \bar{f}_1 \\ \vdots \\ \alpha_{M-1} \bar{f}_{M-1} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Comme mentionné plus haut, l'étape suivante, consiste donc à éliminer l'indétermination d'échelle.

### 4.3.2 Elimination de l'indétermination d'échelle

Les contraintes physiques de cette configuration, rencontrée en télédétection, nous permettent ainsi d'éliminer l'indétermination d'échelle liée à l'ACI, comme suit :

Nous ne considérons d'abord que les  $(M - 1)$  premières sources, impliquées dans (4.12) et (4.13). Les facteurs d'échelle correspondants  $\alpha_m$  peuvent être facilement estimés s'il existe au moins un pixel pur pour chacun des  $M$  matériaux purs présents dans les données étudiées (la procédure proposée ci-dessous ne nécessite pas la connaissance de l'emplacement des pixels purs dans les images observées). Dans ce cas, dans chaque pixel pur, la fraction d'abondance de l'un des matériaux est égale à un, tandis que les fractions d'abondance de tous les autres matériaux sont égales à zéro. Ainsi, les sources réelles remplissent les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \min\{f_m(n)\} &= 0 \quad \forall m \in \{1, \dots, M\}, \\ \max\{f_m(n)\} &= 1 \quad \forall m \in \{1, \dots, M\}. \end{aligned}$$

En considérant (4.12) et en notant  $f_m^*(n)$  comme suit :

$$f_m^*(n) = \alpha_m(f_m(n) - \mu_{f_m}),$$

on va étudier séparément pour chacune des sources avec l'indice  $m \in \{1, \dots, M - 1\}$ , les deux cas suivants :

#### (1) Le facteur d'échelle $\alpha_m$ est positif :

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \max\{f_m^*(n)\} &= \alpha_m[\max\{f_m(n)\} - \mu_{f_m}] \\ &= \alpha_m(1 - \mu_{f_m}) \\ \min\{f_m^*(n)\} &= \alpha_m[\min\{f_m(n)\} - \mu_{f_m}] \\ &= -\alpha_m\mu_{f_m}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\alpha_m = \max\{f_m^*(n)\} - \min\{f_m^*(n)\} \quad (4.14)$$

$$\mu_{f_m} = -\min\{f_m^*(n)\} / \alpha_m. \quad (4.15)$$

Conformément au résultat obtenu ci-dessus, on peut estimer la  $m^{\text{ème}}$  source *réelle* (c.à.d. sans indétermination d'échelle), comme suit :

$$\begin{aligned} f_m(n) &= \frac{f_m^*(n)}{\alpha_m} + \mu_{f_m} \\ &= \frac{f_m^*(n) - \min\{f_m^*(n)\}}{\max\{f_m^*(n)\} - \min\{f_m^*(n)\}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

**(2) Le facteur d'échelle  $\alpha_m$  est négatif :**

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\max\{f_m^*(n)\} &= \alpha_m[\min\{f_m(n)\} - \mu_{f_m}] \\ &= -\alpha_m\mu_{f_m} \\ \min\{f_m^*(n)\} &= \alpha_m[\max\{f_m(n)\} - \mu_{f_m}] \\ &= \alpha_m(1 - \mu_{f_m}),\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\alpha_m = \min\{f_m^*(n)\} - \max\{f_m^*(n)\} \quad (4.17)$$

$$\mu_{f_m} = -\max\{f_m^*(n)\}/\alpha_m, \quad (4.18)$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}f_m(n) &= \frac{f_m^*(n)}{\alpha_m} + \mu_{f_m} \\ &= \frac{f_m^*(n) - \max\{f_m^*(n)\}}{\min\{f_m^*(n)\} - \max\{f_m^*(n)\}} \\ &= 1 - \frac{f_m^*(n) - \min\{f_m^*(n)\}}{\max\{f_m^*(n)\} - \min\{f_m^*(n)\}}.\end{aligned} \quad (4.19)$$

Dans la pratique, le signe du facteur d'échelle  $\alpha_m$  pour chacune des sources est inconnu. Par conséquent, nous ne savons pas laquelle des équations (4.16) ou (4.19) (respectivement (4.14) ou (4.17)) doit être utilisée pour calculer la source réelle  $f_m(n)$  (respectivement le facteur d'échelle  $\alpha_m$ ). En comparant les équations (4.16) et (4.19), il est clair que si la mauvaise équation est utilisée, nous obtenons la source *inversée* :

“les valeurs à zéro dans la source réelle correspondent aux valeurs à un dans la source inversée calculée en utilisant la mauvaise équation et vice versa”.

On note respectivement  $\tilde{f}_m(n)$  et  $\tilde{\alpha}_m$ , la  $m^{\text{ème}}$  source reconstruite et le facteur d'échelle correspondant, calculés en utilisant l'un des deux jeux d'équations (4.14)-(4.16) ou (4.17)-(4.19). Dans le cas où les bonnes équations sont utilisées, cela revient à considérer :

$$\begin{aligned}\tilde{f}_m(n) &= f_m(n) \\ \tilde{\alpha}_m &= \alpha_m,\end{aligned}$$

dans le cas contraire :

$$\begin{aligned}\tilde{f}_m(n) &= 1 - f_m(n) \\ \tilde{\alpha}_m &= -\alpha_m.\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous proposons deux stratégies pour résoudre le problème ci-dessus, appelé dans le jargon de la Séparation de Sources, *indétermination de signe*.

**Première stratégie :**

Chacune des  $(M - 1)$  sources reconstruites,  $\tilde{f}_m(n)$ , peut être calculée de deux manières possibles en utilisant (4.16) ou (4.19). Ainsi, il y a  $2^{M-1}$  combinaisons possibles pour toutes les



$(M - 1)$  sources. Pour chacune de ces combinaisons et pour tous les pixels d'indice  $n$ , on calcule le critère suivant :

$$Q(n) = 1 - \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{f}_m(n). \quad (4.20)$$

Parmi les  $(M - 1)$  sources impliquées dans (4.13), supposons que  $K$  sources reconstruites  $\tilde{f}_m(n)$  (correspondant à un premier ensemble  $D_1$ ) soient calculées en utilisant la mauvaise formule et les autres  $(M - 1 - K)$  (représentées par un deuxième ensemble  $D_2$ ) soient reconstruites par la bonne formule. Dans ce cas, il y a trois configurations possibles :

(i)  $K = 0$  :

C'est-à-dire que toutes les sources sont correctement reconstruites, et ainsi le critère (4.20) nous donne :

$$\begin{aligned} Q(n) &= 1 - \sum_{m=1}^{M-1} f_m(n) \\ &= f_M(n). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ceci correspond à la  $M^{\text{ème}}$  fraction d'abondance réelle dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

(ii)  $1 \leq K \leq M - 2$  :

C'est-à-dire, de telle sorte que les ensembles  $D_1$  et  $D_2$  contiennent chacun au moins une source, et ainsi le critère (4.20) devient :

$$\begin{aligned} Q(n) &= 1 - \sum_{i \in D_1} (1 - f_i(n)) - \sum_{j \in D_2} f_j(n) \\ &= 1 - K + \sum_{i \in D_1} f_i(n) - \sum_{j \in D_2} f_j(n). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dans un pixel pur d'indice  $n$  correspondant à l'une des sources de  $D_2$ , la valeur de cette source est égale à un, tandis que toutes les autres sources sont égales à zéro. Ainsi, à partir de (4.22),  $Q(n) = -K \leq -1$  dans ce pixel.

(iii)  $K = M - 1$  :

C'est-à-dire, de telle sorte que toutes les sources sont inversées. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} Q(n) &= 1 - \sum_{i=1}^{M-1} (1 - f_i(n)) \\ &= 1 - (M - 1) + \sum_{i=1}^{M-1} f_i(n) \\ &= 2 - M + (1 - f_M(n)) \\ &= 3 - M - f_M(n). \end{aligned}$$

Dans un pixel pur où  $f_M(n) = 1$ , le critère devient  $Q(n) = 2 - M \leq -1$  si  $M > 2$ .

Ainsi comme indiqué plus haut, si toutes les  $(M - 1)$  sources reconstruites sont calculées en utilisant la bonne équation, ce critère est non-négatif ( $\forall n$ ). Dans le cas contraire, c'est-à-dire si au moins une des sources reconstruites est calculée avec la mauvaise équation, ce critère devient négatif (et inférieur ou égal à  $-1$ ) pour au moins une valeur de  $n$  si  $M > 2$ , et dans l'hypothèse d'existence de pixels purs. Cette propriété peut donc être utilisée pour choisir les bonnes estimations des sources (et les facteurs  $\alpha_m$  correspondants) parmi toutes les  $(2^{M-1})$  possibilités, quand il y a au moins trois endmembers dans l'image hyperspectrale. Il est à noter que si seulement deux endmembers sont présents dans la totalité de l'image, l'ACI est inutile car dans ce cas, en raison de la contrainte de somme à un, il n'y aura qu'une seule composante indépendante.

### Deuxième stratégie :

Dans de nombreuses applications, le nombre de pixels purs pour chaque matériau est beaucoup plus faible que le nombre de pixels où ce matériau n'est pas présent. Ainsi, on sait que le nombre de valeurs nulles est supérieur au nombre de valeurs égales à un pour chaque source réelle. Si tel n'est pas le cas après calcul de la  $m^{\text{ème}}$  source reconstruite en supposant un facteur d'échelle positif et donc en utilisant l'équation (4.16), on en déduit que le facteur d'échelle réel est négatif et on utilise ainsi les équations (4.17) et (4.19) pour calculer  $\alpha_m$  et  $f_m(n)$ . Il est utile de préciser, que lors des simulations présentées dans la Section 4.4, notre choix s'est porté, pour des raisons de simplicité sur l'utilisation de cette seconde stratégie.

Une fois que les  $(M - 1)$  sources réelles ont été trouvées en utilisant l'une des deux procédures décrites ci-dessus, la  $M^{\text{ème}}$  source peut être calculée en utilisant la contrainte de somme à un (4.4), comme suit :

$$f_M(n) = 1 - \left( \sum_{m=1}^{M-1} f_m(n) \right). \quad (4.23)$$

Par ailleurs, la multiplication de la  $m^{\text{ème}}$  colonne de  $R^*$  par le facteur d'échelle  $\alpha_m$  calculé ci-dessus, nous donne d'après (4.12) :

$$R' = \begin{bmatrix} r_{11} - r_{1M} & \cdots & r_{1(M-1)} - r_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{L1} - r_{LM} & \cdots & r_{L(M-1)} - r_{LM} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

En utilisant la moyenne de (4.9), on peut calculer les éléments  $r_{lM}$  de la  $M^{\text{ème}}$  colonne de la vraie matrice de mélange  $R$  (contenant donc les  $M$  colonnes), comme suit :

$$r_{lM} = \mu_{x_l} - (r_{l1} - r_{lM})\mu_{f_1} - \cdots - (r_{l(M-1)} - r_{lM})\mu_{f_{M-1}}. \quad (4.25)$$

Connaissant  $r_{lM}$  et la matrice (4.24), on peut finalement en déduire la vraie matrice de mélange, incluant la  $M^{\text{ème}}$  colonne, comme suit :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{L1} & r_{L2} & \cdots & r_{LM} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

### 4.3.3 Initialisation de la NMF

La méthode présentée ci-dessus conduit à des résultats parfaits dans des conditions idéales. Cependant, comme introduit un peu plus haut :

- (i) les  $(M - 1)$  sources peuvent généralement être modérément statistiquement dépendantes,
- (ii) aucun algorithme d'ACI ne fournit une séparation parfaite,
- (iii) l'existence d'un pixel pur par matériau peut ne pas être réaliste dans certaines configurations et les données peuvent être bruitées.

Dans ces conditions, les estimations des sources et de la matrice de mélange par notre méthode d'ACI modifiée peuvent être inacceptables, mais fournissent une approximation grossière des sources réelles et de la matrice de mélange correspondante. Ces données approximatives peuvent ensuite être utilisées pour initialiser un algorithme de NMF, soumis à la contrainte de somme à un, ce qui devrait donner de meilleurs résultats.

Il est à signaler que dans le but de satisfaire la contrainte de somme à un, définie par (4.4), on ajoute aux matrices des observations et des spectres (matrice de mélange), une ligne constituée d'une valeur constante positive [10]. Enfin, il est également à préciser que dans cette configuration, les sources et la matrice de mélange sont estimées en parallèle.

Pour une idée plus générale de l'approche proposée, un schéma résumant les trois étapes détaillées ci-dessus est présenté dans la figure 4.1.

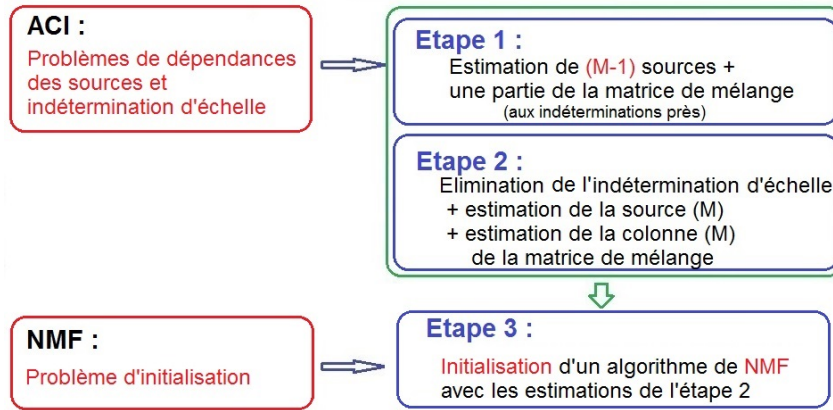


FIGURE 4.1 – Schéma récapitulatif des différentes étapes de l'approche proposée.

## 4.4 Résultats expérimentaux

Dans la section en cours, nous présentons les différents tests effectués dans le cadre de cette étude. Nous commençons par présenter les critères de performances utilisés pour évaluer la qualité des résultats obtenus, puis nous détaillons les résultats d'expérimentations réalisées avec différents types de données :

- (1) Image synthétique constituée à partir d'un mélange linéaire de cartes d'abondance réalisées avec des signaux aléatoires de distribution uniforme, ainsi que des spectres de réflectance réels.
- (2) Image synthétique constituée à partir d'un mélange linéaire de cartes d'abondance réalisées avec des signaux aléatoires de distribution de Dirichlet, ainsi que des spectres de réflectance réels.

- (3) Image synthétique constituée à partir d'un mélange linéaire de cartes d'abondance déduites numériquement à partir de cartes de classification réelles, ainsi que des spectres de réflectance réels.
- (4) Deux images réelles (sans vérité terrain).

#### 4.4.1 Critères de performances

Pour procéder à l'évaluation quantitative des résultats obtenus, qui ne peut être appliquée que sur les images synthétiques introduites ci-dessus, nous avons utilisé deux critères de performances différents. Ces derniers sont définis comme suit :

##### Pour les fractions d'abondance :

La comparaison entre les cartes d'abondance estimées et d'origine a été effectuée en utilisant l'erreur quadratique moyenne normalisée (ou "NMSE", pour "Normalized Mean Squared Error", en anglais) et ce, après correction des permutations induites par les méthodes utilisées. Le NMSE est définie pour chacune des sources, comme suit :

$$NMSE = \frac{\|F_m - \hat{F}_m\|_F^2}{\|F_m\|_F^2}. \quad (4.27)$$

où  $F_m$  et  $\hat{F}_m$  représentent respectivement la  $m^{\text{ème}}$  carte d'abondance (source) et la  $m^{\text{ème}}$  carte d'abondance estimée.

##### Pour les spectres de réflectance :

La comparaison entre les spectres estimés et d'origine, après correction des permutations, a été effectuée en utilisant l'angle spectral (ou "SAM", pour "Spectral Angle Mapper", en anglais). Ce dernier est défini (en degrés) pour chacune des colonnes de la matrice de mélange, comme suit :

$$SAM = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{r}_m, \hat{\mathbf{r}}_m \rangle}{\|\mathbf{r}_m\| \cdot \|\hat{\mathbf{r}}_m\|}\right). \quad (4.28)$$

où  $\mathbf{r}_m$  et  $\hat{\mathbf{r}}_m$  sont respectivement le  $m^{\text{ème}}$  spectre (colonne de la matrice de mélange) et le  $m^{\text{ème}}$  spectre estimé.  $\|x\|$  et  $\langle x, y \rangle$  représentent respectivement la norme 2 de  $x$  et le produit scalaire de  $x$  et  $y$ .

Par ailleurs, il est à signaler que pour la plupart des cas, la comparaison des méthodes est réalisée sur la base des valeurs moyennes de SAM et NMSE obtenus sur tous les endmembers.

#### 4.4.2 Test 1

Dans une première expérience, nous avons testé notre méthode sur des données artificielles générées à partir de cartes d'abondance aléatoires et de spectres réels issus d'une bibliothèque spectrale. Plus précisément, ces données ont été réalisées comme suit :

- Création de  $(M - 1)$  cartes aléatoires de fractions d'abondance indépendantes, contenant chacune 6400 échantillons (le nombre d'échantillons utilisé est arbitraire), et réparties uniformément sur  $[0, \frac{1}{M}]$ ,
- Création de la  $M^{\text{ème}}$  source en utilisant la contrainte de somme à un (4.4),
- Injection d'un pixel pur par source, c'est-à-dire un pixel où l'une des sources est égale à un et toutes les autres sont nulles,
- Mélange de ces  $M$  sources avec une matrice de mélange réelle contenant des spectres de endmembers (avec 221 longueurs d'onde), en utilisant le modèle linéaire (4.1). Les spectres utilisés ont été choisis arbitrairement à partir d'une bibliothèque spectrale appelée "USGS" [11].

Nous avons ensuite effectué plusieurs expérimentations pour démélanger cette image hyperspectrale de la manière suivante :

**(a) ACI standard (sans modification) :**

L'application sur cette image de la méthode FastICA [1] sans modification (c.à.d. en estimant les  $M$  sources), nous a donné de mauvais résultats et ce, conformément à la discussion présentée au niveau de la Section 4.2 relative aux limites de ce type de méthode. Ceci est logique vu que les sources ne sont pas indépendantes en raison de la contrainte de somme à un. Par ailleurs, les résultats ne sont pas interprétables (sans un post-traitement) en raison de l'indétermination de facteur d'échelle. Pour plus de détails à ce sujet, il est possible de consulter le Chapitre 2 de ce manuscrit, ou bien l'article de Nascimento et al. [2].

**(b) NMF standard (sans modification) :**

Après application de la méthode de NMF standard - celle minimisant la fonction objective représentée par la norme de Frobenius [7] - avec 5 initialisations différentes (chaque initialisation étant complètement aléatoire), nous avons ici aussi obtenu de mauvais résultats. Comme mentionné dans le Chapitre 2, ceci n'est pas surprenant car ce type de méthode est très sensible aux valeurs d'initialisation, sans oublier les aspects de non unicité de la factorisation. Les résultats de ces tests sont présentés dans le tableau 4.1 qui met en exergue la mauvaise qualité des spectres et sources estimées. En effet, la moyenne de NMSE sur toutes les sources est à chaque initialisation  $> 0.9$ . Il est à préciser que dans cette expérimentation, le nombre de sources a été choisi arbitrairement et fixé à  $M = 8$  sources.

**(c) modifICA-NMF :**

L'application des deux premières étapes de notre approche, détaillées en Sections 4.3.1 et 4.3.2, a engendré de bons résultats, comme mis en évidence au niveau du tableau 4.2 (voir les résultats obtenus par modifICA). Ceci est dû au fait que les  $M - 1$  premières sources sont indépendantes (cas parfait), et ainsi il n'est pas nécessaire, pour ce type de données d'aller encore plus loin, c.à.d. d'appliquer par la suite la NMF.

Ceci étant, l'application de l'ensemble de la méthode proposée - et donc incluant l'étape relative à la NMF - permet de réduire encore plus la distance entre les observations et les matrices estimées (sources et mélange). Ainsi, l'ensemble de l'approche améliore le résultat obtenu par modifICA. Ceci est illustré dans le tableau 4.2, où nous présentons la moyenne des NMSE et SAM obtenus sur toutes les sources. Il est à préciser que dans cette expérimentation, le nombre de sources a également été choisi arbitrairement et cette fois fixé à  $M = 6$  sources.

TABLEAU 4.1 – Résultats obtenus avec une méthode de NMF standard appliquée sur l'image synthétique du Test 1- performances pour  $M = 8$  sources artificielles, et avec 5 initialisations différentes.

|                               |      | matériau<br>(1) | matériau<br>(2) | matériau<br>(3) | matériau<br>(4) | matériau<br>(5) | matériau<br>(6) | matériau<br>(7) | matériau<br>(8) | valeur<br>moyenne |
|-------------------------------|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| <b>Initiatisation<br/>(1)</b> | SAM  | 3,53            | 1,39            | 5,80            | 2,36            | 7,66            | 7,22            | 2,93            | 5,38            | 4,03              |
|                               | NMSE | 1,282           | 0,837           | 1,090           | 0,957           | 1,135           | 1,255           | 1,003           | 0,774           | 0,926             |
| <b>Initiatisation<br/>(2)</b> | SAM  | 5,95            | 3,28            | 6,37            | 13,13           | 7,25            | 2,06            | 14,03           | 10,04           | 6,90              |
|                               | NMSE | 1,322           | 0,962           | 1,175           | 1,037           | 0,948           | 1,073           | 1,228           | 0,779           | 0,947             |
| <b>Initiatisation<br/>(3)</b> | SAM  | 4,77            | 2,74            | 8,67            | 5,40            | 13,07           | 7,68            | 1,38            | 12,17           | 6,21              |
|                               | NMSE | 1,355           | 0,915           | 1,035           | 1,202           | 1,220           | 1,115           | 0,894           | 0,782           | 0,947             |
| <b>Initiatisation<br/>(4)</b> | SAM  | 10,98           | 2,42            | 30,76           | 4,10            | 10,44           | 11,84           | 1,55            | 18,33           | 10,05             |
|                               | NMSE | 1,140           | 0,971           | 1,396           | 0,973           | 0,970           | 1,262           | 1,042           | 0,783           | 0,949             |
| <b>Initiatisation<br/>(5)</b> | SAM  | 4,03            | 2,85            | 16,43           | 3,79            | 13,28           | 3,45            | 2,69            | 14,98           | 6,83              |
|                               | NMSE | 1,458           | 0,838           | 1,282           | 0,990           | 0,954           | 1,189           | 0,942           | 0,774           | 0,936             |

TABLEAU 4.2 – Comparatif des résultats obtenus avec modifICA et modifICA-NMF, appliquées sur l'image synthétique du Test 1 - la comparaison des méthodes est réalisée sur la base des valeurs moyennes de SAM et NMSE obtenus sur tous les endmembers /  $M = 6$  sources artificielles.

|      | modifICA     | modifICA-NMF |
|------|--------------|--------------|
| SAM  | <b>0,85</b>  | <b>0,50</b>  |
| NMSE | <b>0,030</b> | <b>0,016</b> |

Dans les Figures 4.2 et 4.3, nous présentons respectivement, un des spectres utilisés ainsi que son estimation obtenue avec modifICA-NMF, et l'évolution des critères de performances de modifICA-NMF en fonction du nombre  $M$  de sources (variant de 3 à 9 sources). Les résultats illustrés dans la figure 4.3 sont détaillés dans le tableau 4.3. Nous y remarquons globalement une diminution des performances de l'approche proposée avec l'augmentation du nombre de sources.

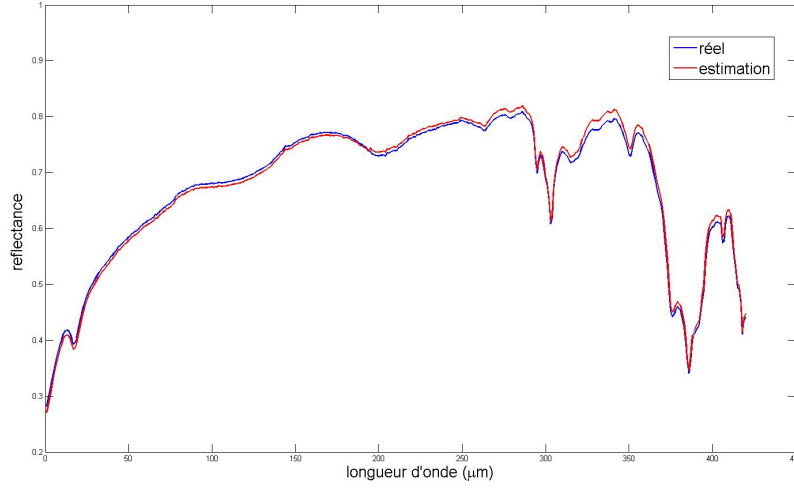


FIGURE 4.2 – Illustration de la superposition d'un spectre réel avec son estimation (utilisé dans la dernière expérimentation du Test 1).

#### 4.4.3 Test 2

Dans une deuxième expérience, et comme mentionné en introduction, nous avons testé notre méthode sur des données artificielles issues d'un mélange linéaire de cartes d'abondance artificielles obtenues grâce à une distribution de Dirichlet et des spectres réels. Plus précisément, ces données ont été réalisées comme suit :

- Création de  $M$  fractions d'abondance, contenant chacune  $50 \times 50$  échantillons (le nombre d'échantillons utilisé est arbitraire). Ces dernières ont été obtenues grâce à une distribution de Dirichlet, connue pour être bien adaptée pour simuler ce type de données [12, 13]. Celle-ci est définie comme suit :

$$\mathcal{D}(f_1, f_2, \dots, f_M | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M) = \frac{\Gamma(\sum_{m=1}^M \theta_m)}{\prod_{m=1}^M \Gamma(\theta_m)} \prod_{m=1}^M f_m^{\theta_m - 1} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \sum_{m=1}^M f_m = 1 \\ f_m \geq 0 \\ \theta_m \geq 0, \end{cases} \quad (4.29)$$

où  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M]^T$  représente le vecteur de paramètres de cette distribution.

- Injection d'un pixel pur par source, c'est-à-dire un pixel où l'une des sources est égale à un et toutes les autres sont nulles.
- Mélange de ces  $M$  sources en utilisant le modèle linéaire (4.1) avec une matrice de mélange contenant des spectres de endmembers (avec 221 longueurs d'onde). Ces derniers spectres ont été choisis arbitrairement à partir de la bibliothèque spectrale "USGS" [11].

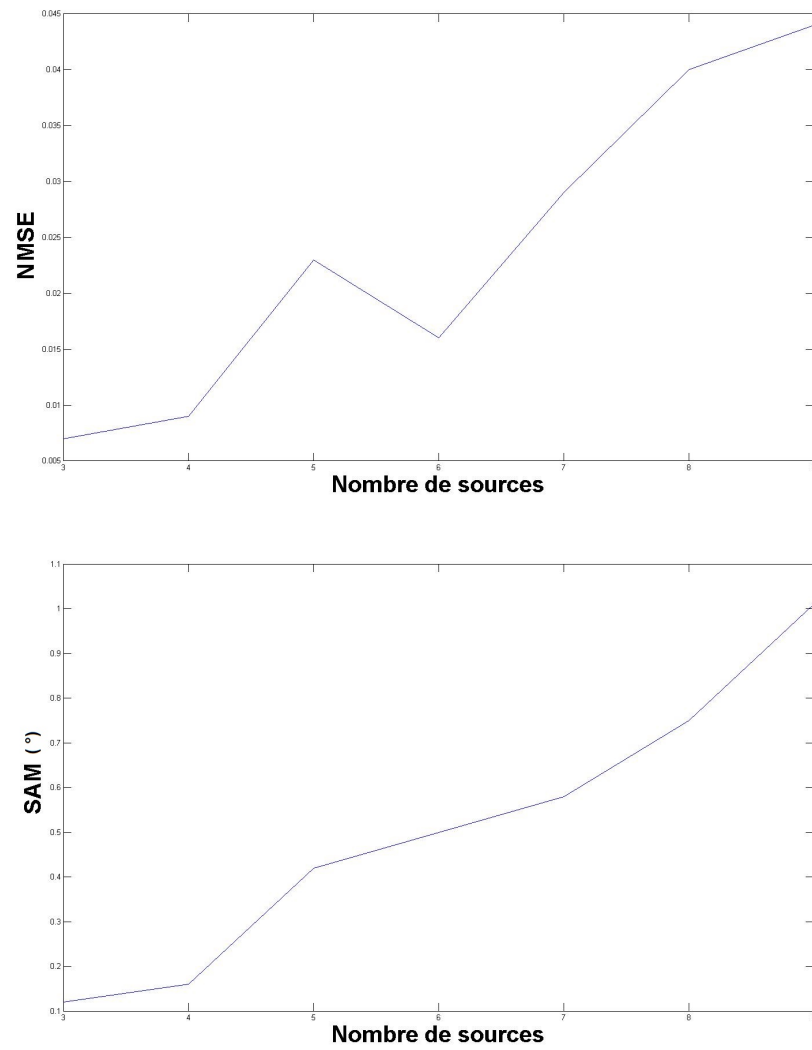


FIGURE 4.3 – Critères de performances en fonction du nombre de sources.



TABLEAU 4.3 – Résultats obtenus avec la méthode proposée appliquée sur l'image synthétique du Test 1 - performances en fonction du nombre de sources (entre 3 et 9) / cas idéal :  $M - 1$  sources indépendantes.

|                              |      | matériau<br>(1) | matériau<br>(2) | matériau<br>(3) | matériau<br>(4) | matériau<br>(5) | matériau<br>(6) | matériau<br>(7) | matériau<br>(8) | matériau<br>(9) | valeur<br>moyenne |
|------------------------------|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| <b>M=3</b><br><b>sources</b> | SAM  | 0,23            | 0,20            | 0,05            |                 |                 |                 |                 |                 |                 | 0,12              |
|                              | NMSE | 0,015           | 0,007           | 0,004           |                 |                 |                 |                 |                 |                 | 0,007             |
| <b>M=4</b><br><b>sources</b> | SAM  | 0,24            | 0,33            | 0,07            | 0,18            |                 |                 |                 |                 |                 | 0,16              |
|                              | NMSE | 0,007           | 0,017           | 0,015           | 0,006           |                 |                 |                 |                 |                 | 0,009             |
| <b>M=5</b><br><b>sources</b> | SAM  | 0,50            | 0,84            | 0,41            | 0,28            | 0,47            |                 |                 |                 |                 | 0,42              |
|                              | NMSE | 0,046           | 0,016           | 0,046           | 0,014           | 0,016           |                 |                 |                 |                 | 0,023             |
| <b>M=6</b><br><b>sources</b> | SAM  | 0,52            | 0,72            | 0,62            | 0,35            | 1,22            | 0,05            |                 |                 |                 | 0,50              |
|                              | NMSE | 0,024           | 0,020           | 0,021           | 0,026           | 0,024           | 0,001           |                 |                 |                 | 0,016             |
| <b>M=7</b><br><b>sources</b> | SAM  | 0,56            | 0,82            | 1,00            | 0,26            | 1,33            | 0,47            | 0,21            |                 |                 | 0,58              |
|                              | NMSE | 0,022           | 0,023           | 0,073           | 0,023           | 0,051           | 0,019           | 0,020           |                 |                 | 0,029             |
| <b>M=8</b><br><b>sources</b> | SAM  | 0,60            | 1,17            | 0,79            | 0,35            | 1,51            | 1,42            | 0,41            | 0,54            |                 | 0,75              |
|                              | NMSE | 0,064           | 0,027           | 0,042           | 0,070           | 0,026           | 0,054           | 0,047           | 0,032           |                 | 0,040             |
| <b>M=9</b><br><b>sources</b> | SAM  | 0,33            | 0,44            | 1,70            | 1,08            | 0,19            | 0,07            | 4,80            | 0,95            | 0,55            | 1,01              |
|                              | NMSE | 0,027           | 0,106           | 0,056           | 0,028           | 0,032           | 0,011           | 0,059           | 0,083           | 0,037           | 0,044             |

Contrairement à la première expérience, et dans l'objectif d'observer le comportement de notre approche avec un niveau différent des coefficients de corrélation entre les  $M$  sources, nous avons fait en sorte, grâce aux paramètres  $\theta_m$  de cette distribution, de modifier expérimentalement le degré de corrélation des  $M$  sources. Les paramètres  $\theta_m$ , ainsi que le niveau des coefficients de corrélation entre les  $M$  sources considérées sont détaillés au niveau de l'annexe A. Ainsi, nous présentons dans les tableaux 4.4 et 4.5, les résultats des tests obtenus, en faisant varier le nombre de sources (entre 3 et 9) et ce, pour chacune des configurations suivantes :

- (a) Images contenant  $M - 1$  sources peu corrélées entre elles, ainsi qu'une  $M^{\text{ème}}$  source présentant une corrélation assez élevée avec les  $M - 1$  premières.
- (b) Images contenant  $M - 2$  sources peu corrélées entre elles, parmi les  $M$  sources utilisées. Les deux autres sources présentent souvent une corrélation plus élevée avec les  $M - 2$  premières.

Nous remarquons dans ces deux tableaux (4.4 et 4.5) que l'ensemble de la démarche proposée aboutit à de bonnes performances tant en ce qui concerne les sources (cartes d'abondance) que les colonnes de la matrice de mélange (spectres) : pour les premières, dans la plupart des cas, nous avons obtenu un NMSE moyen  $< 0,1$ . Il en va de même pour les colonnes de la matrice de mélange, quand dans la majorité des cas, nous avons obtenu un SAM moyen  $< 1,5$  (en degrés), ce qui est très acceptable pour ce type de données. Nous remarquons par ailleurs, que les résultats détaillés au niveau du tableau 4.4 sont légèrement meilleurs que ceux présentés dans le tableau 4.5, ce qui n'est pas surprenant en raison du niveau des coefficients de corrélation entre les  $M$  sources considérées dans cette expérimentation. En effet, et comme détaillé plus haut, dans la configuration (a) seule une source présente une corrélation assez élevée avec les  $M - 1$  premières, au contraire de la configuration (b) où nous avons deux sources présentant une corrélation plus élevée (avec certaines des  $M - 2$  premières). Aussi, et comme constaté au niveau de la dernière expérimentation du Test 1, nous signalons que les valeurs les moins bonnes correspondent au cas  $M = 9$  sources.

Pour finir, nous présentons dans le tableau 4.6 les résultats obtenus en utilisant les images de la configuration (b), avec comme différence par rapport aux deux premières expérimentations (tableaux 4.4 et 4.5), l'augmentation du nombre d'itérations de la NMF dans l'ensemble de notre approche : de 30.000 précédemment à 100.000 dans cette dernière expérimentation (le choix du nombre d'itérations a été fixé arbitrairement). Comme illustré dans ce tableau 4.6, et en comparaison avec le tableau 4.5, le résultat obtenu est légèrement amélioré. Cette amélioration est due à l'augmentation du nombre d'itérations au niveau de la NMF, permettant ainsi de réduire encore plus la distance entre les observations et les matrices estimées (sources et mélange). Il est à préciser par contre que l'augmentation du nombre d'itérations n'est pas sans conséquence sur le temps de calcul en particulier quand il s'agit d'une grande image (nombre important de pixels). La comparaison des SAM obtenus dans les tableaux 4.5 et 4.6, en fonction du nombre de sources (variant entre 3 et 9), est illustrée dans la figure 4.4.

#### 4.4.4 Test 3

Dans cette partie des tests, nous avons également testé notre méthode sur un dernier jeu de données artificielles issues d'un mélange linéaire de cartes d'abondance obtenues grâce à des

TABLEAU 4.4 – Résultats obtenus avec la méthode proposée appliquée sur l'image synthétique du Test 2 - configuration (a) : Images contenant  $M - 1$  sources peu corrélées entre elles, ainsi qu'une  $M^{\text{ème}}$  source présentant une corrélation assez élevée avec les  $M - 1$  premières / performances en fonction du nombre de sources (entre 3 et 9).

|                       |      | matériau<br>(1) | matériau<br>(2) | matériau<br>(3) | matériau<br>(4) | matériau<br>(5) | matériau<br>(6) | matériau<br>(7) | matériau<br>(8) | matériau<br>(9) | valeur<br>moyenne |
|-----------------------|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| <b>M=3</b><br>sources | SAM  | 0,21            | 0,006           | 0,90            |                 |                 |                 |                 |                 |                 | 0,28              |
|                       | NMSE | 0,019           | 0,001           | 0,019           |                 |                 |                 |                 |                 |                 | 0,009             |
| <b>M=4</b><br>sources | SAM  | 0,33            | 0,03            | 2,49            | 0,42            |                 |                 |                 |                 |                 | 0,65              |
|                       | NMSE | 0,045           | 0,004           | 0,051           | 0,034           |                 |                 |                 |                 |                 | 0,027             |
| <b>M=5</b><br>sources | SAM  | 0,34            | 0,04            | 1,47            | 0,37            | 1,24            |                 |                 |                 |                 | 0,58              |
|                       | NMSE | 0,051           | 0,008           | 0,050           | 0,038           | 0,049           |                 |                 |                 |                 | 0,033             |
| <b>M=6</b><br>sources | SAM  | 0,27            | 0,10            | 1,51            | 0,46            | 1,58            | 0,31            |                 |                 |                 | 0,60              |
|                       | NMSE | 0,066           | 0,017           | 0,065           | 0,057           | 0,073           | 0,080           |                 |                 |                 | 0,051             |
| <b>M=7</b><br>sources | SAM  | 0,15            | 0,18            | 2,68            | 0,47            | 2,26            | 0,24            | 1,14            |                 |                 | 0,89              |
|                       | NMSE | 0,090           | 0,027           | 0,097           | 0,089           | 0,080           | 0,086           | 0,084           |                 |                 | 0,069             |
| <b>M=8</b><br>sources | SAM  | 0,23            | 0,19            | 2,61            | 0,67            | 1,78            | 0,27            | 1,06            | 0,27            |                 | 0,79              |
|                       | NMSE | 0,080           | 0,028           | 0,091           | 0,087           | 0,071           | 0,115           | 0,060           | 0,086           |                 | 0,069             |
| <b>M=9</b><br>sources | SAM  | 0,18            | 0,31            | 3,51            | 0,60            | 2,72            | 0,52            | 1,40            | 0,77            | 0,52            | 1,05              |
|                       | NMSE | 0,119           | 0,044           | 0,101           | 0,120           | 0,084           | 0,129           | 0,123           | 0,086           | 0,112           | 0,092             |

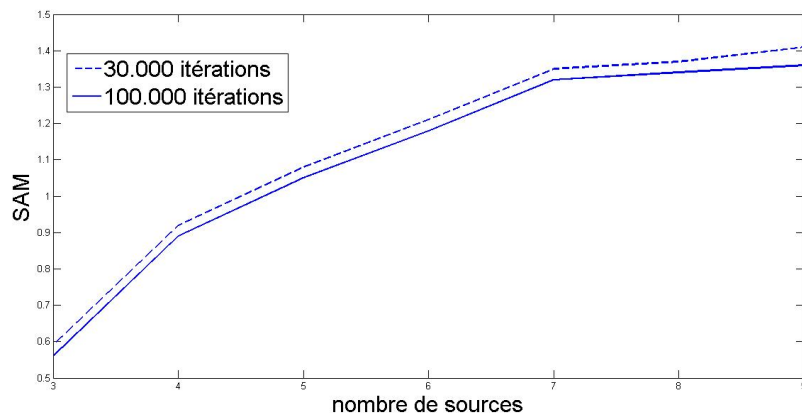


FIGURE 4.4 – Comparaison des SAM obtenus dans les tableaux 4.5 et 4.6, en utilisant 30.000 et 100.000 itérations.

TABLEAU 4.5 – Résultats obtenus avec la méthode proposée appliquée sur l'image synthétique du Test 2 - configuration (b) : Images contenant  $M - 2$  sources peu corrélées entre elles, parmi les  $M$  sources utilisées. Les deux autres sources présentent souvent une corrélation plus élevée avec les  $M - 2$  premières / performances en fonction du nombre de sources (entre 3 et 9).

|                              |      | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | valeur  |
|------------------------------|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
|                              |      | (1)      | (2)      | (3)      | (4)      | (5)      | (6)      | (7)      | (8)      | (9)      | moyenne |
| <b>M=3</b><br><b>sources</b> | SAM  | 1,24     | 0,07     | 1,05     |          |          |          |          |          |          | 0,59    |
|                              | NMSE | 0,064    | 0,003    | 0,028    |          |          |          |          |          |          | 0,024   |
| <b>M=4</b><br><b>sources</b> | SAM  | 1,38     | 0,11     | 1,63     | 1,49     |          |          |          |          |          | 0,92    |
|                              | NMSE | 0,062    | 0,006    | 0,036    | 0,103    |          |          |          |          |          | 0,041   |
| <b>M=5</b><br><b>sources</b> | SAM  | 1,34     | 0,12     | 1,53     | 1,65     | 1,86     |          |          |          |          | 1,08    |
|                              | NMSE | 0,074    | 0,010    | 0,047    | 0,100    | 0,095    |          |          |          |          | 0,054   |
| <b>M=6</b><br><b>sources</b> | SAM  | 1,52     | 0,27     | 1,56     | 1,75     | 2,00     | 1,36     |          |          |          | 1,21    |
|                              | NMSE | 0,073    | 0,020    | 0,058    | 0,111    | 0,098    | 0,160    |          |          |          | 0,074   |
| <b>M=7</b><br><b>sources</b> | SAM  | 1,36     | 0,26     | 1,68     | 1,66     | 2,12     | 1,10     | 2,63     |          |          | 1,35    |
|                              | NMSE | 0,083    | 0,024    | 0,072    | 0,113    | 0,104    | 0,121    | 0,112    |          |          | 0,078   |
| <b>M=8</b><br><b>sources</b> | SAM  | 1,38     | 0,26     | 1,80     | 1,69     | 2,26     | 1,10     | 2,78     | 1,05     |          | 1,37    |
|                              | NMSE | 0,080    | 0,027    | 0,079    | 0,126    | 0,128    | 0,132    | 0,120    | 0,132    |          | 0,092   |
| <b>M=9</b><br><b>sources</b> | SAM  | 1,07     | 0,38     | 1,53     | 1,67     | 2,35     | 1,12     | 2,93     | 0,99     | 2,04     | 1,41    |
|                              | NMSE | 0,091    | 0,031    | 0,085    | 0,133    | 0,115    | 0,137    | 0,153    | 0,141    | 0,146    | 0,103   |

TABLEAU 4.6 – Résultats obtenus avec la méthode proposée appliquée sur l'image synthétique du Test 2 - configuration (b) : Images contenant  $M - 2$  sources peu corrélées entre elles, parmi les  $M$  sources utilisées. Les deux autres sources présentent souvent une corrélation plus élevée avec les  $M - 2$  premières / performances en fonction du nombre de sources (entre 3 et 9), avec augmentation du nombre d'itérations de la NMF.

|                       |      | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | matériau | valeur  |
|-----------------------|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
|                       |      | (1)      | (2)      | (3)      | (4)      | (5)      | (6)      | (7)      | (8)      | (9)      | moyenne |
| <b>M=3</b><br>sources | SAM  | 1,22     | 0,05     | 0,96     |          |          |          |          |          |          | 0,56    |
|                       | NMSE | 0,064    | 0,003    | 0,027    |          |          |          |          |          |          | 0,023   |
| <b>M=4</b><br>sources | SAM  | 1,34     | 0,08     | 1,55     | 1,46     |          |          |          |          |          | 0,89    |
|                       | NMSE | 0,061    | 0,005    | 0,034    | 0,103    |          |          |          |          |          | 0,041   |
| <b>M=5</b><br>sources | SAM  | 1,29     | 0,09     | 1,44     | 1,61     | 1,85     |          |          |          |          | 1,05    |
|                       | NMSE | 0,073    | 0,009    | 0,046    | 0,098    | 0,096    |          |          |          |          | 0,054   |
| <b>M=6</b><br>sources | SAM  | 1,54     | 0,26     | 1,43     | 1,74     | 1,99     | 1,33     |          |          |          | 1,18    |
|                       | NMSE | 0,073    | 0,019    | 0,056    | 0,111    | 0,098    | 0,158    |          |          |          | 0,074   |
| <b>M=7</b><br>sources | SAM  | 1,38     | 0,25     | 1,55     | 1,65     | 2,05     | 1,06     | 2,62     |          |          | 1,32    |
|                       | NMSE | 0,084    | 0,022    | 0,070    | 0,112    | 0,103    | 0,117    | 0,112    |          |          | 0,076   |
| <b>M=8</b><br>sources | SAM  | 1,37     | 0,25     | 1,70     | 1,68     | 2,23     | 1,06     | 2,79     | 1,01     |          | 1,34    |
|                       | NMSE | 0,079    | 0,024    | 0,078    | 0,126    | 0,128    | 0,128    | 0,120    | 0,130    |          | 0,090   |
| <b>M=9</b><br>sources | SAM  | 1,05     | 0,36     | 1,45     | 1,66     | 2,28     | 1,08     | 2,92     | 0,97     | 2,00     | 1,36    |
|                       | NMSE | 0,090    | 0,029    | 0,084    | 0,132    | 0,114    | 0,134    | 0,153    | 0,138    | 0,143    | 0,102   |

cartes de classification d'occupation des sols et des spectres réels issus d'une bibliothèque spectrale. Ces données ont été réalisées comme suit :

- Création de  $M = 8$  sources (fractions d'abondance) réalistes, contenant chacune  $80 \times 80$  pixels. Ces dernières ont été créées à partir d'une classification réelle de cartes d'occupation des sols (voir [14] pour plus de détails).  
Ces sources réalistes, représentées au niveau de la figure 4.5, sont modérément dépendantes (voir les coefficients de corrélation entre les sources en annexe A).
- Mélange de ces  $M$  sources en utilisant le modèle linéaire (4.1) avec une matrice de mélange contenant des spectres de 431 longueurs d'onde. Ces spectres ont été choisis arbitrairement à partir d'une bibliothèque spectrale appelée "AGC" [15]. La composition RVB (Rouge, Vert, Bleu) des observations est représentée au niveau de la figure 4.6.

Les cartes de fractions d'abondance estimées en utilisant uniquement la partie modifICA de notre approche et à l'aide de l'ensemble de la méthode proposée modifICA-NMF, sont respectivement présentées dans les figures 4.7 et 4.8.

Comme illustré dans ces figures, les résultats obtenus par modifICA ne sont pas acceptables pour certaines des cartes, à savoir les cartes (a, b, d, f, et h) de la figure 4.7. Comme mentionné plus haut, ceci n'est pas une surprise car l'hypothèse d'indépendance n'est pas totalement vérifiée. Cependant, les résultats obtenus avec l'ensemble de la démarche modifICA-NMF, qu'on présente dans la figure 4.8, sont similaires aux cartes réelles (présentées dans la figure 4.5).

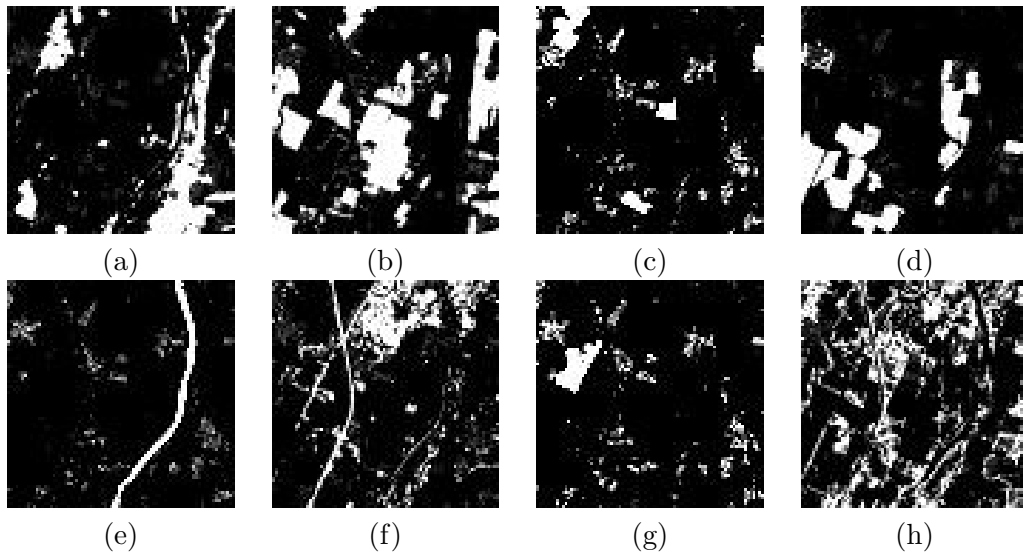


FIGURE 4.5 – Les huit sources utilisées dans le Test 3 (la couleur blanche représente les valeurs à un).

Par ailleurs, nous présentons dans le tableau 4.7, les résultats obtenus en utilisant la méthode NMF standard, une méthode connue de la littérature, appelée MVC-NMF [8] (voir Chapitre 3), ainsi que notre méthode modifICA-NMF. Pour être plus précis, soulignons qu'en ce qui concerne les méthodes NMF et MVC-NMF, nous avons utilisé 10 initialisations aléatoires différentes pour chacune de ces méthodes et nous présentons le résultat global, c.à.d. la moyenne sur 10 réalisations.

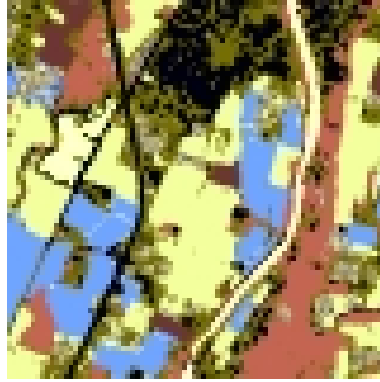


FIGURE 4.6 – Composition RVB de l'image hyperspectrale observée, utilisée dans le Test 3.

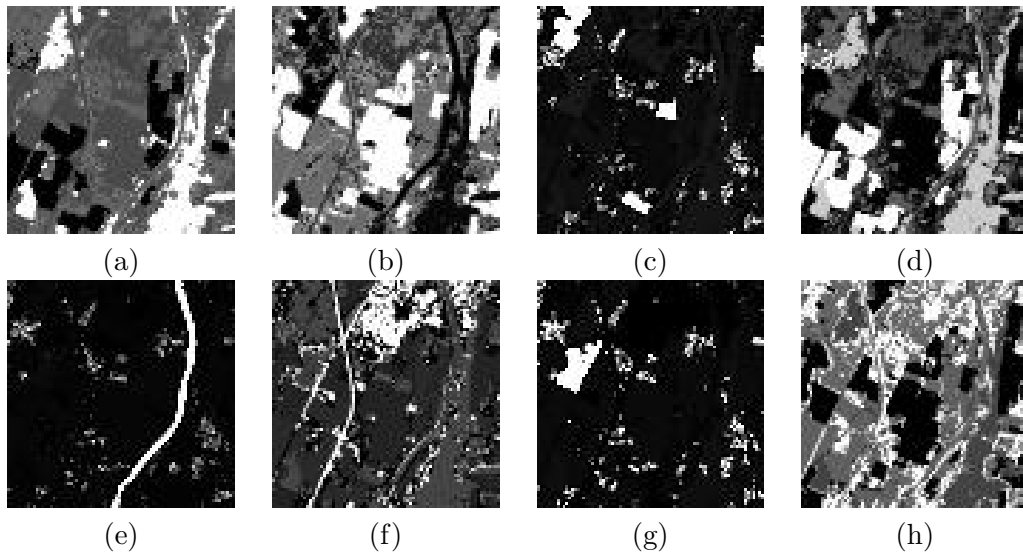


FIGURE 4.7 – Approximations des sources en sortie avec modifICA pour le Test 3.

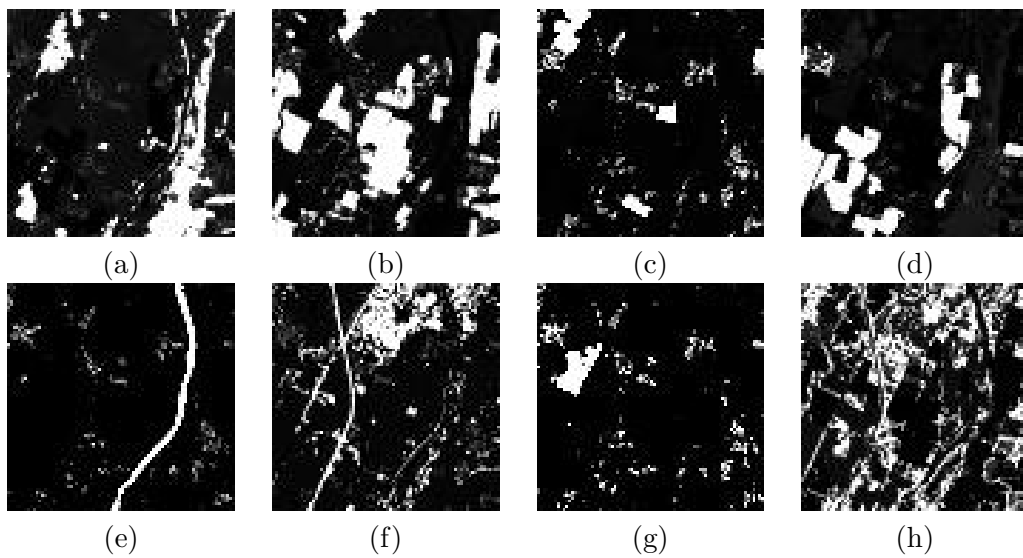


FIGURE 4.8 – Cartes estimées avec modifICA-NMF pour le Test 3.

Les résultats présentés confirment les bonnes performances de notre algorithme dans une configuration réaliste par rapport aux méthodes classiques considérées dans cette expérimentation. Enfin, nous présentons, dans la figure 4.9, un des spectres réels et son estimation en utilisant modifICA-NMF.

TABLEAU 4.7 – Comparatif des résultats obtenus avec NMF standard, MVC-NMF et modifICA-NMF, appliquées sur l'image synthétique du Test 3 - la comparaison des méthodes est réalisée sur la base des valeurs moyennes de SAM et NMSE obtenus sur tous les endmembers /  $M = 8$ .

|      | NMF standard | MVC-NMF | modifICA-NMF |
|------|--------------|---------|--------------|
| SAM  | 4,83         | 4,88    | <b>1,22</b>  |
| NMSE | 0,131        | 0,098   | <b>0,003</b> |

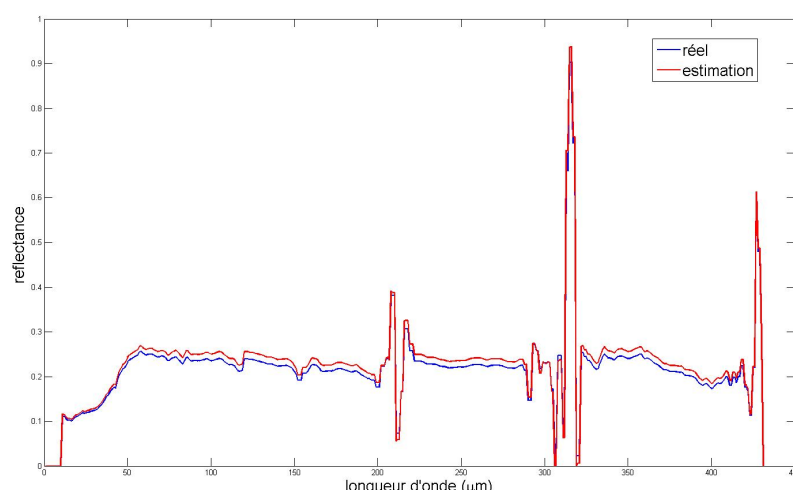


FIGURE 4.9 – Superposition de l'un des spectres réels et de son estimation, obtenue avec modifICA-NMF pour le Test 3.

#### 4.4.5 Test 4

Dans cette partie des expérimentations, nous avons effectué des tests préliminaires avec d'autres méthodes d'ACI, à savoir JADE et N-ICA (pour "Non-negative Independent Component Analysis", en anglais). Pour plus d'informations concernant la méthode JADE, il est possible de consulter le Chapitre 2 (ou bien [16]). Pour ce qui est de l'Analyse en Composantes Indépendantes Non négatives (qui prend en compte les contraintes de non négativité), il est possible de consulter les articles de M. Plumley [17, 18].

L'objectif de ces tests est de donner un aperçu sur le comportement de l'approche proposée (au niveau de la première partie) en utilisant d'autres méthodes d'ACI. Pour ce faire, nous



avons utilisé les mêmes données que celles employées lors du Test 3 et dont les sources sont illustrées dans la figure 4.5. Ci-dessous, nous présentons d'abord les résultats obtenus en incluant la méthode JADE dans l'approche détaillée plus haut en Section 4.3.1, c.à.d. en remplacement de FastICA. Puis de la même manière, nous présentons les résultats obtenus en incluant la méthode N-ICA.

Les cartes de fractions d'abondance (sources) estimées en utilisant uniquement les deux premières étapes de l'approche (modifICA) et à l'aide de l'ensemble de l'approche proposée modifICA-NMF, sont respectivement présentées dans les figures 4.10 et 4.11.

Comme illustré dans ces figures, les résultats obtenus par modifICA ne sont pas acceptables pour certaines des cartes, à savoir les cartes (a, b, d et h) de la figure 4.10. Cependant, celles obtenues avec l'ensemble de la démarche modifICA-NMF, présentées dans la figure 4.11, sont similaires aux cartes réelles, ce qui est très encourageant.

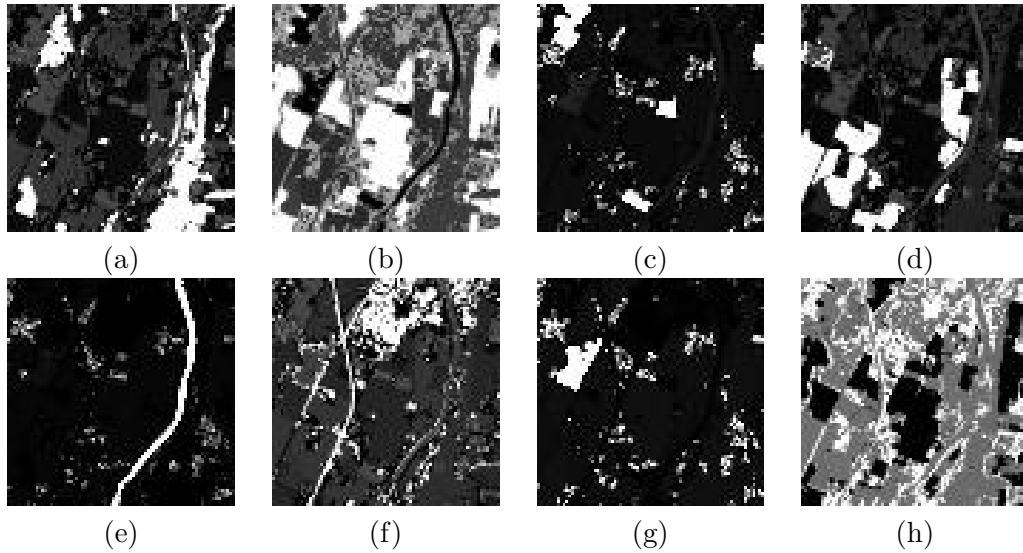


FIGURE 4.10 – Approximations des sources en sortie de modifICA pour le Test 4 (incluant JADE)

Par ailleurs, et comme mentionné plus haut, nous avons également testé notre approche en nous basant sur une méthode d'ACI non négative (N-ICA). Il est important de signaler qu'avec cette méthode, et en particulier dans la deuxième étape de notre approche, le facteur d'échelle (devant être éliminé)  $\alpha_m$  est toujours positif. Dans ce cas, nous n'utiliserons dans cette étape, que les équations de normalisation des sources, relatives au facteur d'échelle positif (voir Eq. (4.14) et (4.16)). Les cartes de fractions d'abondance estimées en utilisant cette nouvelle version de notre approche, sont présentées au niveau de l'annexe B. Ce dernier résultat est très encourageant car les cartes obtenues sont du même ordre que celles obtenues ci-dessus avec notre approche incluant JADE ou bien FastICA.

Nous présentons dans le tableau 4.8, les performances obtenues avec notre approche en utilisant d'abord FastICA, puis JADE et enfin N-ICA. Les résultats obtenus sont corrects dans l'ensemble, néanmoins nous remarquons une amélioration des performances dans la version basée

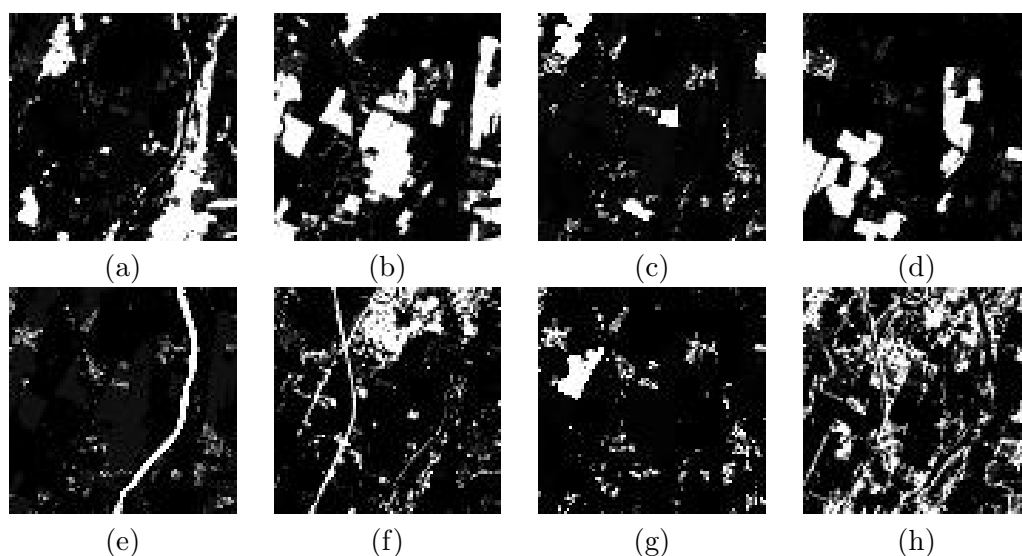


FIGURE 4.11 – Cartes estimées avec modifICA-NMF pour le Test 4 (incluant JADE)

sur la méthode JADE, avec un SAM moyen de l'ordre de 0,84 (en degrés), et un NMSE moyen de 0,002.

TABLEAU 4.8 – Comparatif des résultats obtenus avec modifICA-NMF (incluant FastICA), modifICA-NMF (incluant JADE) et modifICA-NMF (incluant N-ICA)- la comparaison des méthodes est réalisée sur la base des valeurs moyennes de SAM et NMSE obtenus sur tous les endmembers /  $M = 8$ .

|      | modifICA-NMF (FastICA) | modifICA-NMF (JADE) | modifICA-NMF (N-ICA) |
|------|------------------------|---------------------|----------------------|
| SAM  | 1,22                   | 0,84                | 0,89                 |
| NMSE | 0,003                  | 0,002               | 0,003                |

#### 4.4.6 Tests effectués sur données réelles

En ce qui concerne les tests devant être effectués sur données réelles, et en dépit du manque de disponibilité de celles-ci ou bien du manque de vérité terrain, nous avons quand même été en mesure de tester notre approche sur un jeu de données utilisé dans la littérature. Ce jeu de données représente une petite partie ( $50 \times 50$  pixels) d'une image, contenant 203 bandes spectrales, acquise par le spectromètre AVIRIS ("Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer"), au dessus de "Moffett Field", à la pointe sud de la baie de San Francisco (en Californie). La zone d'intérêt, illustrée dans la figure 4.12, est composée principalement de trois éléments : l'eau, le sol nu et la végétation.

Comme mentionné, en raison du manque de vérité terrain, nous n'avons pas pu effectuer une comparaison quantitative des résultats obtenus avec cette image. Ceci étant, nous avons essayé dans cette dernière partie des tests, de comparer visuellement les cartes d'abondance

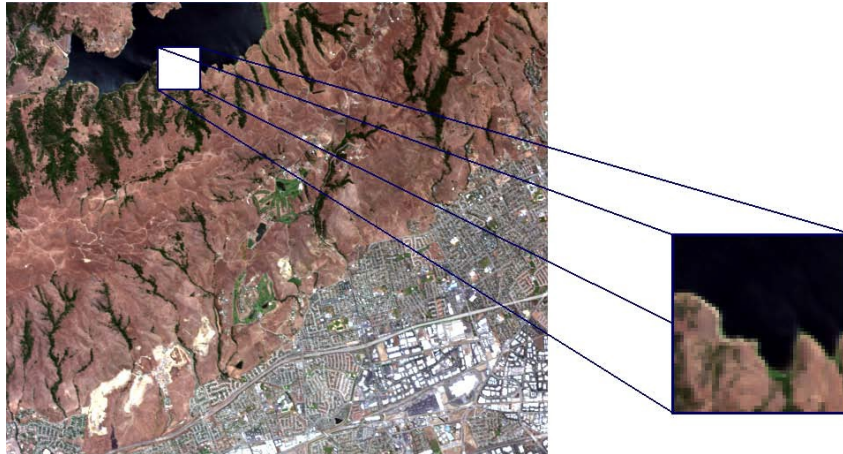


FIGURE 4.12 – Image “Moffett field” acquise par AVIRIS (la région d’intérêt est représentée dans la partie droite) [19].

estimées à celles obtenues avec d’autres méthodes de la littérature. Cette comparaison nous a permis de constater que les résultats préliminaires obtenus ne sont pas le fruit du hasard, mais qu’ils se rapprochent visuellement de ceux obtenus par une méthode Bayésienne (connue pour être plus complexe à mettre en place) présentée dans [19]. Les cartes d’abondance obtenues en sortie de cette dernière méthode, ainsi que celles obtenues avec une autre méthode Bayésienne (semi-supervisée) [20], et enfin celles résultant de l’algorithme FCLS [10] (“Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery”) sont illustrées dans la figure 4.13. Pour information, ces dernières cartes ont été récupérées à partir du manuscrit de thèse de O. Eches [19], et sont présentées dans le seul souci de pouvoir les comparer avec le résultat obtenu grâce à l’approche proposée.

Les cartes obtenues avec l’approche que nous proposons (en utilisant dans la première étape, la méthode FastICA) sont illustrées dans la figure 4.14, où on remarque les mêmes composantes contenues dans l’image utilisée dans ce test, et retrouvés dans la figure 4.13, à savoir, la végétation (a), l’eau (b) et le sol nu (c).

Par ailleurs, nous avons testé notre approche sur une petite partie d’une deuxième image réelle. Cette dernière a également été acquise par le spectromètre AVIRIS et est connue sous l’appellation de “Cuprite”. La zone d’intérêt, composée de  $50 \times 90$  pixels (et de 224 bandes spectrales), est illustrée dans la figure 4.15. Cette petite partie de Cuprite contient essentiellement trois composantes (minerais) : (a) Alunite, (b) Kaolinite, et (c) Montmorillonite [12].

Comme pour la première expérimentation sur image réelle (Moffet), et en raison du manque de vérité terrain, nous n’avons pas pu effectuer une comparaison quantitative des résultats obtenus avec cette image. Néanmoins, la comparaison visuelle des cartes obtenues avec notre approche nous a permis de constater qu’elles se rapprochent de celles obtenues par une autre méthode connue dans la littérature (et présentée dans [12], en page 111). La méthode en question est appelée DECA (pour “Dependent Component Analysis”). Les cartes d’abondance obtenues en sortie de cette dernière méthode, sont illustrées dans la figure 4.16.

Enfin, nous présentons, dans la figure 4.17, les cartes obtenues avec l’approche que nous proposons, en utilisant la méthode JADE dans la première étape. Il est certes difficile de comparer

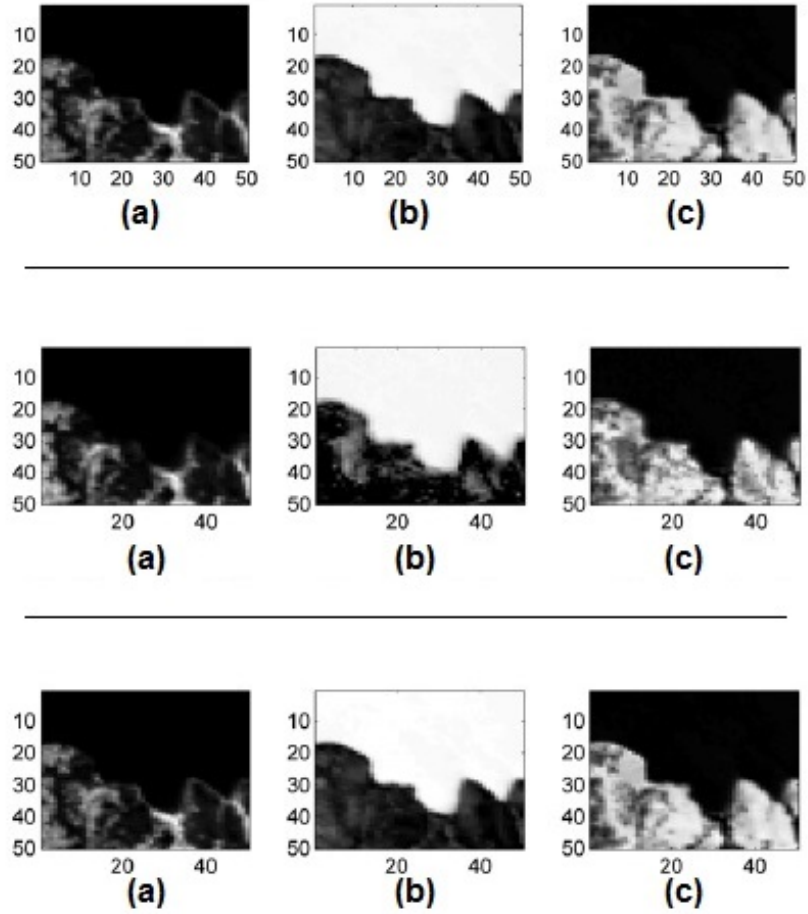


FIGURE 4.13 – Cartes d’abondance estimées avec d’autres méthodes [19] : (a) la végétation, (b) l’eau, et (c) le sol nu / **En haut** : cartes estimées par une méthode Bayésienne (semi-supervisée) [20]. **Au milieu** : cartes estimées par FCLS [10]. En bas : cartes estimées par une méthode Bayésienne proposée dans [19].

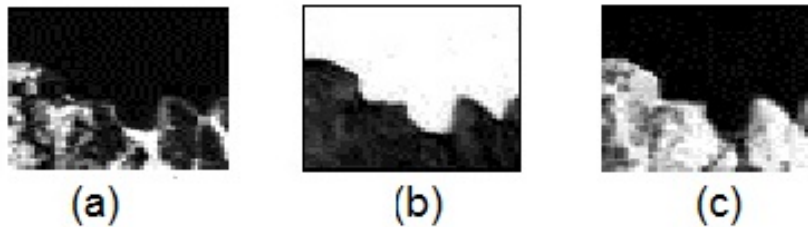


FIGURE 4.14 – Cartes d’abondance estimées avec l’approche proposée (en utilisant dans la première étape, la méthode FastICA) : (a) la végétation, (b) l’eau, et (c) le sol nu.

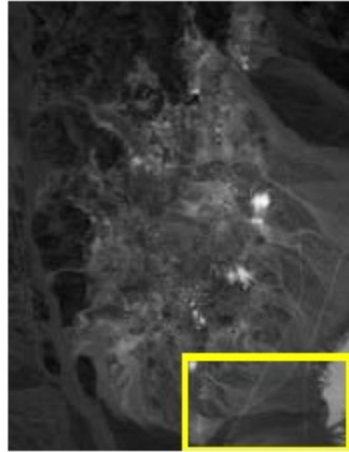


FIGURE 4.15 – Image “Cuprite” acquise par AVIRIS (la région d’intérêt est représentée dans le rectangle) [12].

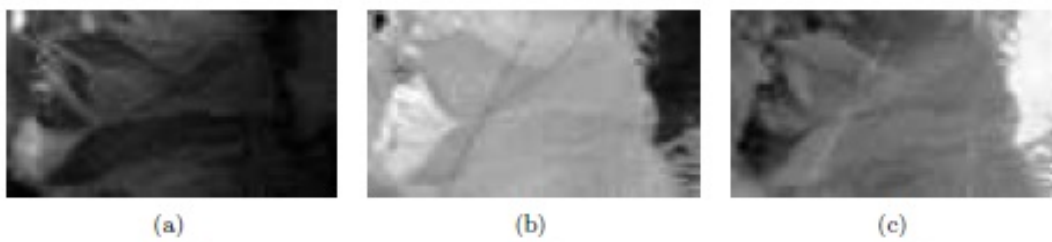


FIGURE 4.16 – Cartes d’abondance estimées avec DECA [12].

les cartes que nous obtenons avec celles illustrées dans la figure 4.16 ; néanmoins, dans l'ensemble, il est possible d'identifier les mêmes composantes contenues dans l'image utilisée dans ce test.

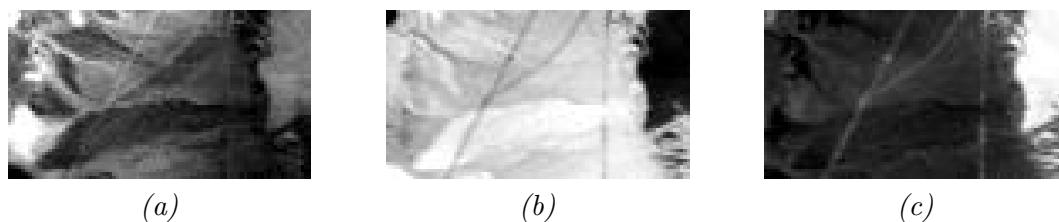


FIGURE 4.17 – Cartes d'abondance estimées avec l'approche proposée (en utilisant dans la première étape, la méthode JADE).

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche non supervisée de démixage pour des images hyperspectrales. Cette dernière est basée sur deux grandes classes de méthodes de SAS. Nous avons d'abord modifié l'approche standard fondée sur l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI), en tenant compte des contraintes de positivité et de somme à un, imposées dans les applications de télédétection pour observation de la terre ; puis nous avons éliminé certaines indéterminations liées à l'ACI en utilisant différentes stratégies. Les sorties obtenues au niveau de cette ACI modifiée, représentant les deux premières étapes de l'approche proposée (appelées plus haut “modifICA”), ont ensuite été utilisées pour initialiser une méthode de NMF qui va améliorer le résultat obtenu et ce, dans le cas de sources dépendantes, telles que celles rencontrées en télédétection.

L'efficacité de notre approche a été validée expérimentalement, d'abord dans une configuration idéale impliquant des sources artificielles, aussi bien pour 3 que pour un nombre supérieur de sources et également en faisant varier le degré de corrélation entre les sources considérées, puis en utilisant des données simulées réalistes, et finalement en utilisant deux images réelles sans vérité terrain. Les résultats des tests effectués sont satisfaisants et démontrent l'intérêt de l'utilisation de notre ACI modifiée comme étape de pré-traitement pour une NMF et ce, en comparaison avec les méthodes classiques considérées dans les tests effectués.

Enfin, en ce qui concerne l'utilisation d'autres méthodes d'ACI, au niveau de la première étape de notre approche (voir Section 4.3.1), il est à signaler que malgré les bons résultats obtenus dans les tests effectués plus haut, il est trop tôt pour tirer une conclusion sur l'efficacité des méthodes d'ACI pouvant être retenues pour ce type de données. Notre objectif pour la suite, est de continuer à travailler sur ces méthodes, notamment celles non utilisées dans les tests présentés ci-dessus (abordées dans le Chapitre 2), afin de définir celles correspondant le mieux aux applications de télédétection. Il sera également question de déterminer les performances de l'approche proposée pour d'autres cartes d'abondance mélangées avec d'autres types de spectres, ainsi que pour d'autres images hyperspectrales.

Dans la suite de ce manuscrit, et comme présenté au niveau de l'introduction générale, nous nous proposons de mettre en avant une autre approche de SAS, différente de celle présentée dans ce chapitre, mais également appliquée au démixage d'images d'observation de la Terre.

L'approche en question est basée, cette fois-ci sur des méthodes d'Analyse en Composantes Parcimonieuses (ACPa).

# Bibliographie

- [1] A. Hyvarinen, J. Karhunen, and E. Oja, *Independent Component Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [2] J.M.P. Nascimento and J.M. Bioucas-Dias, “Does independent component analysis play a role in unmixing hyperspectral data?,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, no. 1, pp. 175–187, January 2005.
- [3] A. Cichocki, R. Zdunek, A. H. Phan, and S-I. Amari, *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations : Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation*, John Wiley and Sons, Chichester, United Kingdom, 2009.
- [4] D. Benachir, Y. Deville, S. Hosseini, M.S. Karoui, and A. Hameurlain, “Hyperspectral image unmixing by non-negative matrix factorization initialized with modified independent component analysis,” in *Proceedings of the fifth IEEE Workshop on Hypers. Image and Signal Proces. : Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, Gainesville, USA, 2013.
- [5] N. Keshava and J.F. Mustard, “Spectral unmixing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, no. 1, pp. 44–57, January 2002.
- [6] J.M. Bioucas-Dias, A. Plaza, N. Dobigeon, M. Parente, Q. Du, P. Gader, and J. Chanussot, “Hyperspectral unmixing overview : Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches,” *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 5, no. 2, pp. 354–379, April 2012.
- [7] D.D. Lee and H.S. Seung, “Algorithms for non-negative matrix factorization,” *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 13, pp. 556–562, 2001.
- [8] L. Miao and H. Qi, “Endmember extraction from highly mixed data using minimum volume constrained nonnegative matrix factorization,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 45, no. 3, pp. 765–777, March 2007.
- [9] C-Y. Kuan and G. Healey, “Using sources separation methods for endmember selection,” in *SPIE. Algorithms and Technologies for Multispectral, Hyperspectral, and Ultraspectral Imagery VIII*, 2002, vol. 4725, pp. 10–17.
- [10] D.C. Heinz and C-I. Chang, “Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, no. 3, pp. 529–545, March 2001.
- [11] R. N. Clark, G. A. Swayze, R. Wise, E. Livo, T. Hoefen, R. Kokaly, and S. J. Sutley, “USGS digital spectral library splib06a,” in *U.S. Geological Survey, Digital Data Series 231*, <http://speclab.cr.usgs.gov/spectral.lib06>, 2007.
- [12] J.M.P Nascimento, *Unsupervised Hyperspectral Unmixing*, Thèse de doctorat, Université Technique de Lisbonne, Lisbonne, Portugal, 2006.



- [13] T. Minka, “Estimating a dirichlet distribution,” *Technical report (revised 2003, 2009)*, pp. 1–13, 2000.
- [14] M.S. Karoui, Y. Deville, S. Hosseini, and A. Ouamri, “Blind spatial unmixing of multispectral images : New methods combining sparse component analysis, clustering and non-negativity constraints,” *Pattern Recognition*, vol. 45, no. 12, pp. 4263–4278, December 2012.
- [15] “<http://www.tec.army.mil/hypercube>,” .
- [16] J-F. Cardoso and A. Souloumiac, “Blind beamforming for non-gaussian signals,” *IEE Proceedings-F*, vol. 140, no. 6, pp. 362–370, Dec. 1993.
- [17] M. Plumbley, “Algorithms for nonnegative independent component analysis,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 14, no. 3, pp. 534–543, May 2003.
- [18] M. Plumbley, “Conditions for nonnegative independent component analysis,” in *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, vol. 9, no. 6, pp. 177–180.
- [19] O. Eches, *Méthodes Bayésiennes pour le démixage d’images hyperspectrales*, Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2010.
- [20] N. Dobigeon, J.-Y. Tournet, and C.-I Chang, “Semi-supervised linear spectral unmixing using a hierarchical bayesian model for hyperspectral imagery,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 7, pp. 2684–2695, July 2008.

## Chapitre 5

# Démélange d'images multi- et hyper-spectrales : parcimonie et propriétés géométriques

### Contents

---

|            |                                                 |            |
|------------|-------------------------------------------------|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Introduction</b>                             | <b>98</b>  |
| <b>5.2</b> | <b>Quelques propriétés</b>                      | <b>98</b>  |
| <b>5.3</b> | <b>Approche proposée (BiS-Corr)</b>             | <b>102</b> |
| 5.3.1      | Etape de détection de zones bi-sources          | 104        |
| 5.3.2      | Etape d'identification de la matrice de mélange | 105        |
| 5.3.3      | Etape d'estimation des cartes d'abondance       | 110        |
| <b>5.4</b> | <b>Résultats expérimentaux</b>                  | <b>111</b> |
| 5.4.1      | Critères de performances                        | 111        |
| 5.4.2      | Tests effectués                                 | 113        |
| <b>5.5</b> | <b>Conclusion</b>                               | <b>127</b> |

---

## 5.1 Introduction

Nous avons présenté, dans le Chapitre 2, diverses méthodes de SAS basées sur la parcimonie. Ces dernières ont été développées dans les espaces d'analyse temporel, temps-fréquence ou même temps-échelle (voir pour plus de détails [1, 2, 3, 4], et en particulier [5, 6, 7]). Récemment, dans [8], le même type d'approche que dans [5] a été appliqué à des images spatiales multispectrales. Comme détaillé au niveau du Chapitre 3 (Section 3.4), les auteurs divisent les données observées en petites zones spatiales à deux dimensions, appelées “zones d'analyse”, constituées de pixels adjacents. Ces zones peuvent avoir n'importe quelle forme et sont notées “ $\Omega$ ” dans la suite de ce chapitre. L'hypothèse principale sur laquelle repose cette méthode est relative à l'existence au niveau de l'image considérée de zones d'analyse contenant une seule source “active” (c.à.d. une zone d'analyse où seul ce matériau est présent). Cette dernière est appelée “zone mono-source”. L'avantage de ce type de méthodes par rapport aux méthodes d'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI), est qu'elles ne nécessitent qu'une faible hypothèse de parcimonie. Cette hypothèse est moins contraignante que l'hypothèse d'indépendance statistique des sources requise dans les méthodes d'ACI, et qui n'est pas garantie en raison de la contrainte de somme à un imposée sur les sources (voir Chapitre 4). Cependant, l'hypothèse de parcimonie sur laquelle repose cette méthode n'est malheureusement pas applicable pour certaines images de télédétection dont la résolution spatiale est trop faible pour qu'elles puissent contenir des pixels purs ; il en va donc de même pour les zones mono-sources nécessaires pour l'estimation des spectres des composants purs. Ceci nous a amenés à travailler avec une hypothèse moins restrictive que celle présentée ci-dessus, et qui consiste à supposer la présence de « zones à deux sources » (zones contenant seulement deux matériaux purs).

Pour cela, nous proposons dans ce chapitre, une nouvelle approche spatiale non supervisée de SAS, appelée “**BiS-Corr**” (pour “Bi-Source Correlation-based blind source separation method”, en anglais). Cette dernière est fondée sur la parcimonie ainsi que sur des propriétés géométriques. Elle consiste d'abord à trouver des zones d'analyse ne contenant que deux sources, en utilisant un critère basé sur la corrélation. Cette étape est suivie par une autre d'identification, où l'on estime géométriquement les spectres des matériaux purs considérés dans l'image utilisée. La dernière étape consiste à estimer les abondances des matériaux purs recherchées en utilisant une méthode des moindres carrés avec contrainte de non-négativité. Les résultats obtenus pour des mélanges simulés de sources réalistes (multi- ou hyper-spectrales) prouvent les bonnes performances de notre méthode, en comparaison avec d'autres méthodes de la littérature.

Dans ce chapitre, nous commencerons par présenter quelques propriétés facilitant la présentation des hypothèses considérées dans la méthode proposée (BiS-Corr). Puis, nous fournirons les grandes lignes de cette dernière, pour ensuite aborder la partie liée aux tests effectués dans le cadre de cette étude.

## 5.2 Quelques propriétés

Nous rappelons que le modèle utilisé dans notre étude est de type linéaire instantané. Celui-ci est présenté de la même manière que précédemment (Chapitre 4), c.à.d. après vectorisation des dimensions spatiales, on peut exprimer la réflectance non-négative observée dans la  $\ell^{\text{ème}}$  bande

spectrale, pour un pixel donné  $n$ , comme suit [9, 10] :

$$x_\ell(n) = \sum_{m=1}^M r_{\ell m} f_m(n) \quad \forall n \in \{1 \cdots N\}, \ell \in \{1 \cdots L\}. \quad (5.1)$$

où  $r_{\ell m}$  représente la  $\ell^{\text{ème}}$  composante spectrale (réflectance) du  $m^{\text{ème}}$  composant pur.  $f_m(n)$  représente la fraction d'abondance du  $m^{\text{ème}}$  composant pur dans le  $n^{\text{ème}}$  pixel, et enfin le nombre de composants purs est représenté par  $M$ .

En considérant les  $N$  pixels d'une image de télédétection composée de  $L$  bandes spectrales, on obtient l'écriture matricielle suivante :

$$X = RF, \quad (5.2)$$

où  $X$  représente l'image de télédétection observée, qui est définie comme suit :

$$X = [x(1) \cdots x(N)] \quad \text{avec} \quad x(n) = [x_1(n) \cdots x_L(n)]^T. \quad (5.3)$$

Les colonnes de  $R$  contiennent les spectres (non-négatifs) des endmembers, qui sont présentés comme suit :

$$R = [r_1 \cdots r_M] \quad \text{avec} \quad r_m = [r_{1m} \cdots r_{Lm}]^T. \quad (5.4)$$

En ce qui concerne la matrice  $F$ , chaque colonne de cette dernière contient les fractions d'abondance de tous les composants purs dans le pixel considéré. Celle-ci est présentée comme suit :

$$F = [f(1) \cdots f(N)] \quad \text{avec} \quad f(n) = [f_1(n) \cdots f_M(n)]^T. \quad (5.5)$$

On rappelle également les contraintes de non-négativité et d'additivité suivantes :

$$f_m(n) \geq 0, \quad \forall \begin{matrix} m \in \{1 \cdots M\} \\ n \in \{1 \cdots N\} \end{matrix}, \quad (5.6)$$

$$\sum_{m=1}^M f_m(n) = 1, \quad \forall n \in \{1 \cdots N\}. \quad (5.7)$$

Dans l'approche proposée, nous nous concentrons d'abord sur les pixels ne contenant que deux sources d'indices  $i$  et  $j$  (avec  $i \neq j$ ), parmi les  $M$  sources prises en compte dans les données considérées. Et ainsi, d'après (5.1), chaque pixel (appelé ci-après, "pixel bi-source") est défini comme suit :

$$x_\ell(n) = r_{\ell i} f_i(n) + r_{\ell j} f_j(n). \quad (5.8)$$

Considérant (5.8), et en tenant compte de la contrainte (5.7), qui induit :

$$f_j(n) = 1 - f_i(n),$$

on obtient :

$$x_\ell(n) = f_i(n)[r_{\ell i} - r_{\ell j}] + r_{\ell j}. \quad (5.9)$$

Si nous utilisons maintenant deux bandes spectrales d'indices  $\ell$  et  $p$  (avec  $\ell \neq p$ ), nous obtenons pour chaque pixel  $n$  un couple de valeurs  $(x_\ell(n), x_p(n))$  définissant un point dans le plan  $(x_\ell, x_p)$ . L'ensemble des pixels bi-sources (contenant les sources  $i$  et  $j$ ) définit un nuage de

points dans ce plan, et nous voulons donc analyser la forme de ce nuage de points. Compte tenu de (5.9), nous obtenons :

$$x_\ell(n) - r_{\ell j} = f_i(n)[r_{\ell i} - r_{\ell j}], \quad (5.10)$$

$$x_p(n) - r_{pj} = f_i(n)[r_{pi} - r_{pj}], \quad (5.11)$$

ce qui donne :

$$f_i(n)[r_{pi} - r_{pj}][x_\ell(n) - r_{\ell j}] = f_i(n)[r_{\ell i} - r_{\ell j}][x_p(n) - r_{pj}]. \quad (5.12)$$

Supposons que seules les deux sources  $f_i(n)$  et  $f_j(n)$  sont non-nulles partout dans une *zone d'analyse* (appelée ci-après “zone bi-source”). Dans ce cas, l'équation (5.12), peut être définie par l'expression de la deuxième coordonnée du point par rapport à la première, comme suit :

$$x_p(n) = ax_\ell(n) + r_{pj} - ar_{\ell j}, \quad (5.13)$$

avec :

$$a = \frac{r_{pi} - r_{pj}}{r_{\ell i} - r_{\ell j}} \quad \text{et} \quad r_{\ell i} \neq r_{\ell j}.$$

Ainsi, tous les points correspondants  $(x_\ell(n), x_p(n))$  appartiennent à la droite définie ci-dessus par (5.13). Au contraire, si plus de deux sources ne sont pas nulles et varient de façon arbitraire dans une zone d'analyse, les points correspondants ne sont pas sur une droite.

En outre, et plus précisément, les points appartiennent seulement à un segment de cette droite, puisque  $0 \leq f_i(n) \leq 1$ . Les extrémités de ce segment sont donc définies par :

(i)  $f_i(n) = 0$  :

Dans ce cas, nous obtenons des équations (5.10) et (5.11),  $x_\ell(n) = r_{\ell j}$  et  $x_p(n) = r_{pj}$ . Ceci est logique, parce que seule la source  $j$  est non-nulle, et c'est son spectre qui est observé dans un tel pixel.

(ii)  $f_i(n) = 1$  :

Dans ce cas,  $x_\ell(n) = r_{\ell i}$ , et  $x_p(n) = r_{pi}$ .

Si nous supposons maintenant qu'il existe dans l'image considérée, au moins une zone d'analyse bi-source pour chaque paire de sources, parmi les  $M$  considérées dans l'image utilisée, alors on obtient une droite pour chaque paire possible de sources. Nous avons dans ce cas un total de  $\frac{M(M-1)}{2}$  segments de droites possibles. Ces segments ont des extrémités communes correspondant aux  $M$  sources, et chacun de ces points extrêmes a les coordonnées suivantes :  $(r_{\ell m}, r_{pm})$  avec  $m \in \{1 \cdots M\}$ .

La figure 5.1 illustre un nuage de points obtenu pour des pixels correspondant à toutes les paires de sources sélectionnées à partir d'un ensemble global de quatre sources artificielles induisant, comme mentionné ci-dessus, six droites possibles.

Le cas le plus difficile et celui qui nous intéresse est le cas où les points associés à chaque paire de sources ne couvrent pas la totalité de chacun des segments possibles, en particulier leurs extrémités. Ces dernières correspondent à des pixels purs, et sont illustrées par un petit cercle dans la figure 5.1.

Dans cette étude, les pixels purs sont donc ignorés, c'est à dire soit ils n'existent pas, soit les

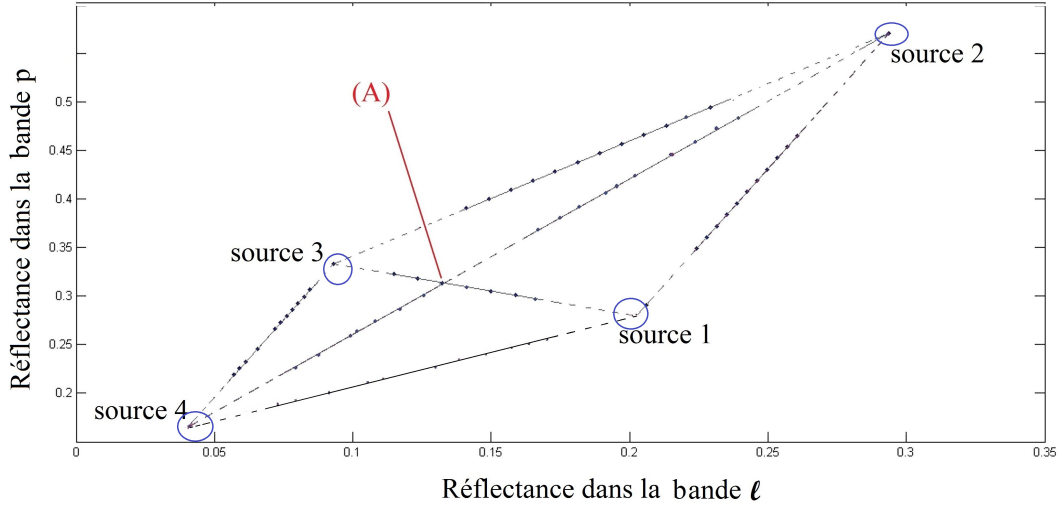


FIGURE 5.1 – Nuage de points en 2D correspondant à des pixels bi-sources.

zones mono-sources sont détectées en utilisant par exemple la méthode proposée dans [8] (voir le Chapitre 3 pour plus de détails concernant cette méthode), et par conséquent les spectres correspondants sont estimés par cette dernière.

Dans le cas où on n'a pas de pixels purs, supposons que nous avons réussi à estimer deux droites correspondant à deux paires de sources, avec des indices  $[i, j]$  pour la première paire et  $[j, k]$  pour la seconde (avec  $i \neq k$ ). Nous avons donc estimé pour chaque droite, **(1)** la pente, et **(2)** l'ordonnée à l'origine. En supposant que ces droites ne sont pas identiques (toujours pour deux bandes spectrales), cela nous permet de déduire leur *point d'intersection* et ainsi d'obtenir les coordonnées  $(r_{\ell j}, r_{pj})$ , correspondant aux deux bandes spectrales du  $j^{\text{ème}}$  endmember.

L'analyse détaillée ci-dessus, ne considérant que deux bandes spectrales, est utile pour la compréhension de la version préliminaire de notre approche. Cependant, l'utilisation de deux bandes seulement ne nous permet pas de résoudre complètement le problème considéré :

- D'une part, les points d'intersection obtenus pour toutes les paires de sources ne nous donnent qu'une partie du spectre correspondant à deux bandes spectrales (parmi les  $L$  bandes considérées dans l'image).
- D'autre part, ce nuage de points (en 2D) contient également de fausses intersections, c.à.d. des intersections entre des segments de droites associés à des paires de sources complètement disjointes  $[i, j]$  et  $[i', j']$ , et qui ne correspondent à aucun des spectres de endmembers réels. Ce cas de figure est représenté par le point (A) de la figure 5.1. Déterminer de manière aveugle toutes les intersections de ce type de segments conduirait donc à des endmembers parasites. Ce problème résulte du fait que deux droites (non parallèles) se croisent toujours dans un espace (2D).

Pour résoudre notre problème, nous étendons maintenant notre approche à plus de 2 bandes spectrales. Ceci sera détaillé dans ce qui suit.

### 5.3 Approche proposée (BiS-Corr)

A partir des propriétés introduites ci-dessus, nous nous proposons de décrire dans cette section une nouvelle approche de SAS (appelée BiS-Corr) essentiellement basée sur des méthodes de parcimonie, et applicable à des images de télédétection multi- et hyper-spectrales d'observation de la Terre. Plus particulièrement, l'approche en question repose sur la détection de zones à deux sources, la classification, et enfin quelques propriétés géométriques.

Nous utilisons dans l'approche proposée quelques notations, définitions et hypothèses liées aux sources (fractions d'abondance) et à la matrice de mélange recherchées. Celles-ci sont détaillées ci-dessous.

#### Notations :

- Les versions centrées de  $x_l(n)$  et  $f_m(n)$  sont notées (respectivement) comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{x}_l(n) &= x_l(n) - \mu_{x_l} \\ \bar{f}_m(n) &= f_m(n) - \mu_{f_m},\end{aligned}$$

où  $\mu_{x_l}$  et  $\mu_{f_m}$  représentent respectivement la moyenne de  $x_l(n)$  et  $f_m(n)$  sur la zone d'analyse  $\Omega$  considérée.

- Le vecteur  $\mathbf{x}_\ell(\Omega)$  est formé des  $x_\ell(n)$  avec  $n \in \Omega$  (si on considère  $\Omega$  comme un ensemble des indices des pixels associés).
- Le vecteur  $\mathbf{f}_m(\Omega)$  est formé des  $f_m(n)$  avec  $n \in \Omega$ .
- Les versions centrées des vecteurs  $\mathbf{x}_\ell(\Omega)$  et  $\mathbf{f}_m(\Omega)$ , sont notées respectivement  $\bar{\mathbf{x}}_\ell(\Omega)$  et  $\bar{\mathbf{f}}_m(\Omega)$ .

#### Définitions :

- **Définition 3 :**  
*Un matériau pur (d'indice  $i$  parmi les  $M$  considérés) est “actif” dans une zone d'analyse si seul ce matériau pur donne un vecteur non nul  $\mathbf{f}_i(\Omega)$ .*
- **Définition 4 :**  
*Une paire de matériaux purs est “isolée” dans une zone d'analyse si seuls ces deux matériaux purs sont actifs dans cette zone d'analyse. Cette zone est alors appelée “zone bi-source”.*
- **Définition 5 :**  
*Une paire de matériaux purs est dite “accessible” dans le domaine spatial s'il existe au moins une zone d'analyse dans laquelle cette paire de matériaux est isolée.*

#### Hypothèses :

Il est à préciser qu'en plus des hypothèses détaillées ci-dessous, nous utilisons dans notre approche l'hypothèse 3 détaillée dans le Chapitre 3 (page 56 du manuscrit).

- **Hypothèse 5 :**  
*Pour chaque matériau pur d'indice  $j$ , parmi les  $M$  considérés, il existe au moins deux paires de matériaux d'indices  $[i, j]$  et  $[j, k]$  (avec  $i \neq k$ ), partageant ce matériau, qui sont accessibles.*

En utilisant la contrainte de somme à un (5.7), on peut écrire une des sources (parmi les  $M$  considérées dans le mélange) en fonction des autres. L'indice de cette source est noté " $m_0$ ", et on note par la même occasion  $\mathcal{M}_0$  l'ensemble des indices de toutes les autres sources :

$$\mathcal{M}_0 = \{1 \cdots M\} - \{m_0\}.$$

On obtient ainsi :

$$f_{m_0}(n) = 1 - \sum_{m \in \mathcal{M}_0} f_m(n). \quad (5.14)$$

En reportant (5.14) dans (5.1), on obtient :

$$x_\ell(n) = \sum_{m \in \mathcal{M}_0} r_{\ell m} f_m(n) + r_{\ell m_0} \left[ 1 - \sum_{m \in \mathcal{M}_0} f_m(n) \right], \quad (5.15)$$

avec  $r_{\ell m_0} [1 - \sum_{m \in \mathcal{M}_0} f_m(n)]$  représentant le terme relatif à la source " $m_0$ " qu'on souhaite retirer, afin de ne considérer que les sources appartenant à  $\mathcal{M}_0$ , et ainsi on obtient à partir de (5.15) :

$$x_\ell(n) = \left[ \sum_{m \in \mathcal{M}_0} (r_{\ell m} - r_{\ell m_0}) f_m(n) \right] + r_{\ell m_0}. \quad (5.16)$$

Conformément à ce qui a été présenté plus haut, la version centrée de (5.16) s'écrit :

$$\bar{x}_\ell(\Omega) = \sum_{m \in \mathcal{M}_0} (r_{\ell m} - r_{\ell m_0}) \bar{f}_m(\Omega). \quad (5.17)$$

où  $(r_{\ell m} - r_{\ell m_0})$  représente un des coefficients de la matrice des écarts de réflectances ( $\forall m \in \mathcal{M}_0$  et  $\ell \in \{1 \cdots L\}$ ). De la même manière, en ce qui concerne la bande spectrale  $p$ , on obtient :

$$\bar{x}_p(\Omega) = \sum_{m \in \mathcal{M}_0} (r_{pm} - r_{pm_0}) \bar{f}_m(\Omega). \quad (5.18)$$

Dans le cas où plus de deux sources sont actives au niveau de la zone d'analyse  $\Omega$  considérée, et conformément à ce qui a été présenté plus haut,  $\mathcal{M}_0$  contient ainsi au moins deux sources actives. Dans cette configuration, il est également nécessaire de rajouter les hypothèses suivantes :

– **Hypothèse 6 :**

*Dans chaque zone d'analyse  $\Omega$ , où le nombre de matériaux purs  $M_\Omega$  actifs est supérieur ou égal à trois,  $M_\Omega - 1$  vecteurs non nuls  $\bar{f}_m(\Omega)$  quelconques sont "linéairement indépendants".*

– **Hypothèse 7 :**

*Dans chaque zone d'analyse  $\Omega$ , la matrice composée des colonnes de la matrice des écarts de réflectances, et correspondant aux matériaux purs actifs, est de rang (colonne) plein.*

En tenant compte de ces hypothèses et définitions, nous présentons dans ce qui suit la structure générale de l'approche proposée. Cette dernière est composée des trois étapes suivantes :

- Détection de toutes les zones d'analyse bi-sources, disponibles au niveau de l'image considérée (observation).



- Identification de la matrice de mélange. Cette étape est composée de trois parties : (1) estimation des paramètres des droites dans un espace à  $L$  dimensions (relatives à chaque zone bi-source), (2) Classification de ces paramètres estimés, et enfin, (3) calcul de la distance minimale entre ces droites.
- Extraction des sources recherchées (les fractions d'abondance) en tenant compte de la contrainte de non-négativité.

Chacune de ces étapes est détaillée ci-dessous.

### 5.3.1 Etape de détection de zones bi-sources

Les données observées sont d'abord divisées en petites zones spatiales à deux dimensions (zones d'analyse), constituées de pixels adjacents. Le domaine spatial est alors exploré à l'aide de ces zones d'analyse adjacentes (ou recouvrantes). L'objectif de cette étape est de déterminer, à partir d'une image, les zones d'analyse où seulement deux matériaux purs sont actifs. Ces dernières représentent les zones bi-sources recherchées.

En utilisant au niveau de ces zones d'analyse, les versions centrées des signaux observés dans les bandes  $\ell$  et  $p$ , on obtient à partir des équations (5.10) et (5.11), ce qui suit :

$$\bar{\mathbf{x}}_\ell(\Omega) = (r_{\ell i} - r_{\ell j})\bar{\mathbf{f}}_i(\Omega), \quad (5.19)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_p(\Omega) = (r_{pi} - r_{pj})\bar{\mathbf{f}}_i(\Omega). \quad (5.20)$$

A partir des équations (5.19) et (5.20) nous pouvons donc déduire que  $\bar{x}_\ell(n)$  et  $\bar{x}_p(n)$  varient *proportionnellement* au niveau des zones bi-sources. Pour chaque zone d'analyse nous détectons cette proportionnalité par le calcul des *coefficients d'intercorrélation*  $\rho_{x_\ell x_p}(\Omega)$ , entre les signaux observés (centrés), qui sont définis comme suit <sup>17</sup> :

$$\rho_{x_\ell x_p}(\Omega) = \frac{\langle \bar{\mathbf{x}}_\ell(\Omega), \bar{\mathbf{x}}_p(\Omega) \rangle}{\|\bar{\mathbf{x}}_\ell(\Omega)\| \cdot \|\bar{\mathbf{x}}_p(\Omega)\|} \quad \forall \ell, p \in \{1 \cdots L\}, \text{ et } \ell > p, \quad (5.21)$$

où  $\|x\|$  et  $\langle x, y \rangle$  représentent respectivement la norme 2 de  $x$  et le produit scalaire de  $x$  et  $y$ .

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (5.21), on obtient :

$$|\rho_{x_\ell x_p}(\Omega)| \leq 1, \quad \forall \ell, p \in \{1 \cdots L\} \text{ et } \ell > p, \quad (5.22)$$

avec égalité si et seulement si  $\bar{\mathbf{x}}_\ell(\Omega)$  et  $\bar{\mathbf{x}}_p(\Omega)$  sont linéairement dépendants.

Ainsi, une condition nécessaire pour qu'une paire de matériaux soit isolée dans une zone d'analyse  $\Omega$ , est :

$$|\rho_{x_\ell x_p}(\Omega)| = 1 \quad \forall \ell, p \in \{1 \cdots L\}, \text{ et } \ell > p, \quad (5.23)$$

car si dans la zone considérée, le nombre de matériaux purs actifs est *égal à deux*, les valeurs de  $|\rho_{x_\ell x_p}(\Omega)|$  seront élevées (théoriquement égales à un). Dans la pratique, pour chaque zone, nous calculons le minimum parmi les  $|\rho_{x_\ell x_p}(\Omega)|$  (pour tout  $\ell, p$  avec  $\ell > p$ ). Si cette mesure est supérieure à un seuil nous considérons cette zone comme étant une **zone bi-source**.

Par ailleurs, la condition (5.23) est une condition suffisante pour que la zone d'analyse considérée soit bi-source, sous certaines hypothèses introduites plus haut (voir hypothèses 6 et 7). En effet, dans le cas où dans la zone considérée plus de deux matériaux purs sont actifs, au moins un  $|\rho_{x_\ell x_p}(\Omega)|$  est nettement inférieur à 1. Pour plus de détails concernant ce cas de figure, il est possible de consulter l'annexe C.

<sup>17</sup>. Dans toute cette étude, quelle que soit la zone d'analyse  $\Omega$  considérée, on exclut le cas où au moins un matériau pur aurait une fraction d'abondance  $f_m(n)$  constante à une valeur non nulle sur toute la zone  $\Omega$ .

### 5.3.2 Etape d'identification de la matrice de mélange

Cette étape consiste à estimer les colonnes de la matrice de mélange. Pour atteindre cet objectif, nous proposons d'abord d'estimer les paramètres de la droite, dans un espace à  $L$  dimensions, relative à chaque zone bi-source, supposée présente dans les données considérées (Partie 1 ci-dessous). Les vecteurs de paramètres estimés dans cette première étape sont par la suite classifiés par groupe, permettant ainsi l'identification d'une seule droite associée à chaque paire de sources (Partie 2). Enfin, la distance minimale entre ces droites est calculée afin d'obtenir les coordonnées, dans un espace à  $L$  dimensions, des spectres des endmembers recherchés (Partie 3).

#### Partie 1 : Estimation des paramètres d'une droite

Comme établi plus haut au niveau des propriétés relatives au cas à 2 sources, nous présentons ci-dessous comment estimer les paramètres d'une droite dans un espace à  $L$  dimensions. Considérons une droite, notée  $D$ , représentée par l'équation paramétrique suivante [11, 12] :

$$\mathbf{p}_s = s\mathbf{u} + \mathbf{d}, \quad (5.24)$$

où  $\mathbf{p}_s$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{d}$ , représentent des vecteurs colonnes à  $L$  dimensions et  $s$  est un scalaire.

L'objectif à atteindre dans cette étape, est l'estimation du vecteur directeur  $\mathbf{u}$  et du point représenté par le vecteur  $\mathbf{d}$  permettant la minimisation de l'erreur quadratique moyenne entre les points de données et la droite  $D$ . Ces points correspondent à des pixels dans la zone bi-source considérée.

Chaque zone d'analyse  $\Omega$  fournit une matrice  $X(\Omega)$  contenant les valeurs  $x_\ell(n)$  des pixels de la zone considérée, dans sa colonne  $\ell$  (avec  $\ell \in \{1 \cdots L\}$ ). L'une des solutions possibles, pour ajuster une droite à un ensemble de points de données, consiste à déterminer *le premier axe principal de ces données* [11, 12]. Ceci est réalisé comme suit :

- Détermination du vecteur  $\mathbf{d}$  de l'équation (5.24), en calculant la *moyenne des colonnes* de  $X^T(\Omega)$  (où  $^T$  représente la transposée). Le vecteur obtenu correspond au centre de gravité de ces données.
- Détermination du vecteur  $\mathbf{u}$  qui n'est autre que le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice de covariance de  $X(\Omega)$ .

Cependant, pour pouvoir ajuster un modèle à un ensemble de données, il est important que le modèle soit identifiable. Dans le cas contraire, la solution de cet ajustement n'est pas unique. Dans (5.24), la droite est définie par  $2L$  paramètres, c.à.d. les éléments de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{d}$ . Cependant, on sait que, dans un espace à  $L$  dimensions, une droite peut être caractérisée avec seulement  $(2L - 2)$  paramètres<sup>18</sup>, à condition qu'elle ne soit pas orthogonale au premier axe, c'est-à-dire, à condition que la première composante  $u_1$  de  $\mathbf{u}$  soit différente de zéro.

Les 1<sup>ère</sup> et  $\ell^{\text{ème}}$  éléments de (5.24) sont présentés comme suit :

$$p_1 = su_1 + d_1,$$

et

$$p_\ell = su_\ell + d_\ell, \text{ avec } \ell \in \{2 \cdots L\}.$$

18. Ceci est plus simple à comprendre si on applique notre logique dans un espace à 2 dimensions ( $L = 2$ ). En effet, même si dans ce cas, la droite (5.24) est définie par  $2L$  ( $= 4$ ) paramètres, en réalité il n'y a que  $2L - 2$  ( $= 2$ ) degrés de liberté (i.e. pente et ordonnée à l'origine).

Et ainsi nous obtenons, si  $u_1 \neq 0$  :

$$\frac{p_1 - d_1}{u_1} = \frac{p_\ell - d_\ell}{u_\ell} = s,$$

ce qui nous donne :

$$p_\ell = \frac{u_\ell}{u_1} p_1 + d_\ell - \frac{u_\ell}{u_1} d_1,$$

soit :

$$p_\ell = u_\ell^* p_1 + d_\ell^*, \quad (5.25)$$

où les  $(2L - 2)$  paramètres normalisés sont définis comme suit :

$$u_\ell^* = \frac{u_\ell}{u_1}, \quad (5.26)$$

et

$$d_\ell^* = d_\ell - \frac{u_\ell}{u_1} d_1. \quad (5.27)$$

Les équations (5.25), (5.26) et (5.27) s'appliquent également pour  $\ell = 1$ , en introduisant  $u_1^* = 1$  et  $d_1^* = 0$ . En rassemblant les  $L$  éléments  $u_\ell^*$  (respectivement  $d_\ell^*$ ) dans un seul vecteur  $\mathbf{u}^*$  (respectivement  $\mathbf{d}^*$ ), l'équation (5.25) définissant la droite considérée peut être écrite sous une forme vectorielle, comme suit :

$$\mathbf{p}_{s^*} = s^* \mathbf{u}^* + \mathbf{d}^*, \quad \text{avec } s^* = p_1.$$

Pour des raisons de lisibilité,  $s^*$  sera remplacé dans la suite du manuscrit par  $s$  (en particulier dans la Partie 3).

## Partie 2 : Classification des paramètres des droites engendrées

Pour chaque paire de sources, la partie précédente nous permet de définir plusieurs couples de vecteurs  $\mathbf{u}^*$  et  $\mathbf{d}^*$ , c.à.d. un couple pour chaque zone bi-source. Nous visons dans ce qui suit à estimer un seul couple  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$  pour chaque paire de sources. En d'autres termes, cette étape consiste à classer les différentes zones bi-sources déterminées précédemment, en tenant compte des paramètres des droites correspondantes, permettant ainsi l'identification d'une seule droite associée à chaque paire de sources. Pour cela, nous avons ré-organisé chaque couple estimé  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$  dans un vecteur global et nous avons classifié ces derniers vecteurs en utilisant successivement chacun d'eux comme suit :

Après avoir affecté le premier vecteur à une première classe notée "classe-1", chaque vecteur est comparé à celui attribué à cette classe en calculant la distance entre eux, c.à.d. la norme 2 de leur différence. A chaque fois que cette distance est inférieure à un seuil, nous attribuons le vecteur testé à cette première classe. Dans le cas contraire, une nouvelle classe est créée ("classe-2") et nous attribuons ce vecteur à cette dernière classe. Ensuite, nous comparons les autres vecteurs avec le premier vecteur de chacune des classes existantes. Chaque vecteur testé est soit affecté à la classe la plus proche en terme de distance, soit, si sa distance par rapport à toutes les classes existantes est supérieure au seuil fixé, le vecteur testé définit une nouvelle classe, et ainsi de suite, pour tous les autres vecteurs.

Une fois cette partie liée à la classification finalisée, c.à.d. après avoir noté à quelle classe appartient chaque vecteur, nous estimons une unique droite pour chacune des classes, en répétant

la procédure d'estimation des paramètres de droites détaillée dans la partie 1, avec comme seule différence l'utilisation de nouvelles matrices, contenant toutes les valeurs des pixels correspondant à chaque classe.

Dans la figure 5.2, nous présentons une illustration de plusieurs droites correspondant à chaque classe. Ces dernières ont été définies à partir d'une image multispectrale simulée, contenant 6 sources artificielles. Comme mentionné plus haut au niveau de la Section 5.2, le nombre de droites possibles est de 15 (calculé à partir de  $\frac{M(M-1)}{2}$ ). Le nombre de droites correspondant aux paires de sources déterminées<sup>19</sup> dans cet exemple est de 11.

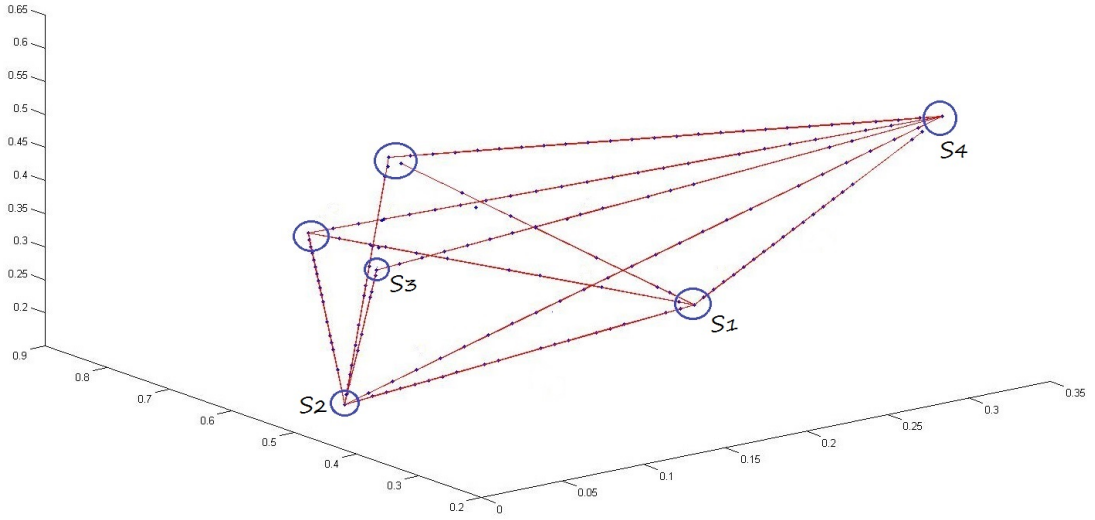


FIGURE 5.2 – Exemple en 3D permettant la visualisation des différentes droites relatives à chaque paire de sources obtenues après l'étape de classification.

Comme illustré dans la figure 5.2, nous sommes maintenant en mesure de représenter chaque droite contenant les points liés à chaque classe, et ainsi d'estimer les points d'intersection qui existent entre les différents couples de droites (les cercles en bleu dans la même figure). Ceci va être détaillé ci-dessous.

### Partie 3 : Mesure de la distance minimale entre deux droites

Dans cette dernière partie de l'étape d'identification, les coordonnées de chaque spectre de endmember (colonne de la matrice de mélange) sont estimées en calculant les points d'intersection de deux droites correspondant à deux paires de sources. En théorie, de tels points existent si et seulement si les deux paires de sources considérées partagent une seule source, et sous réserve d'introduire l'hypothèse suivante (très peu restrictive dans nos applications) :

– **Hypothèse 8 :**

*Si deux paires de matériaux purs ne contiennent pas de matériau pur commun, les deux*

19. Même si le nombre de droites déterminé par la procédure détaillée plus haut est inférieur au nombre de droites possibles compte tenu du nombre de sources mises en œuvre dans cet exemple, il est tout de même possible, avec les hypothèses listées plus haut, de retrouver les sources recherchées. A titre d'exemple, même si la méthode n'a pas réussi à détecter la droite " $s_1s_3$ ", la source  $s_3$  peut être identifiée, comme illustré dans la figure 5.2, à partir des droites " $s_2s_3$ " et " $s_3s_4$ " (détectées).

*segments de droites respectivement définis par chacune de ces paires sur leurs zones bi-sources ne possèdent pas de point d'intersection.*

Cependant, en pratique, il est possible que deux droites estimées, pour deux paires de matériaux purs contenant un matériau commun, ne se coupent pas exactement, en raison par exemple du bruit contenu dans les données. Dans ce cas, les *coordonnées* du spectre de chaque endmembre peuvent être estimées par le calcul du point le plus proche (c.à.d. à distance minimale) entre les deux droites associées. Après estimation de cette distance minimale, les spectres recherchés sont enfin déterminés à l'aide des équations paramétriques des droites. Ci-après, nous détaillons comment calculer efficacement la distance minimale entre deux droites dans un espace à  $L$  dimensions.

L'estimation de la distance minimale entre deux droites est effectuée par la détermination de deux points,  $\mathbf{p}_{s_C}$  sur une des droite (qu'on note  $D_1$ ), et  $\mathbf{q}_{t_C}$  sur une autre droite (qu'on note  $D_2$ ), tels que la distance entre eux soit minimale [13].  $D_1$  et  $D_2$  sont respectivement définies par les équations paramétriques suivantes :

$$\mathbf{p}_s = s\mathbf{u}^* + \mathbf{d}^* \quad (5.28)$$

$$\mathbf{q}_t = t\mathbf{v}^* + \mathbf{e}^*. \quad (5.29)$$

$\mathbf{w}(s, t) = \mathbf{p}_s - \mathbf{q}_t$  est un vecteur entre deux points quelconques situés sur les deux droites. Notre objectif est de déterminer  $\mathbf{w}(s_C, t_C)$  (noté ci-après  $\mathbf{w}_C$ ) qui a la longueur minimale parmi tous les  $s$  et  $t$ . À cette fin, nous devons trouver le segment de droite  $(\mathbf{p}_{s_C}, \mathbf{q}_{t_C})$  joignant ces points et qui est en même temps, comme illustré au niveau de la figure 5.3, perpendiculaire aux deux droites  $D_1$  et  $D_2$  [13].

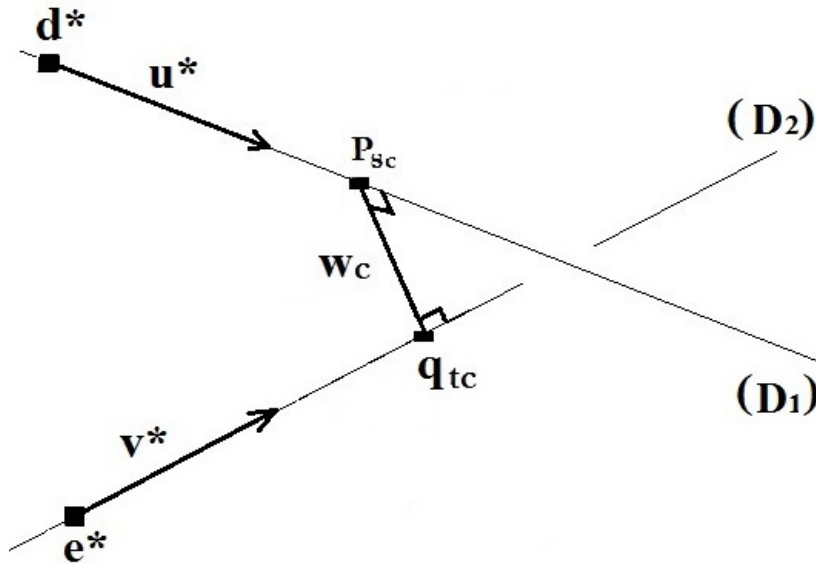


FIGURE 5.3 – Distance entre deux droites (figure adaptée de [13]).

Autrement dit, le vecteur  $\mathbf{w}_C$  est perpendiculaire aux vecteurs directeurs  $\mathbf{u}^*$  et  $\mathbf{v}^*$ , ce qui est équivalent à satisfaire :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{*T} \mathbf{w}_C &= 0 \\ \mathbf{v}^{*T} \mathbf{w}_C &= 0.\end{aligned}$$

Il est facilement possible de résoudre ce couple d'équations en remplaçant  $\mathbf{w}_C$  par  $(\mathbf{p}_{s_C} - \mathbf{q}_{t_C})$ , et en notant  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{d}^* - \mathbf{e}^*$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}^{*T} \mathbf{u}^*)_{s_C} - (\mathbf{u}^{*T} \mathbf{v}^*)_{t_C} &= -\mathbf{u}^{*T} \mathbf{w}_0 \\ (\mathbf{v}^{*T} \mathbf{u}^*)_{s_C} - (\mathbf{v}^{*T} \mathbf{v}^*)_{t_C} &= -\mathbf{v}^{*T} \mathbf{w}_0.\end{aligned}$$

Puis, en notant :

$$\begin{aligned}a_1 &= \mathbf{u}^{*T} \mathbf{u}^* \\ a_2 &= \mathbf{u}^{*T} \mathbf{v}^* \\ a_3 &= \mathbf{v}^{*T} \mathbf{v}^* \\ a_4 &= \mathbf{u}^{*T} \mathbf{w}_0 \\ a_5 &= \mathbf{v}^{*T} \mathbf{w}_0,\end{aligned}$$

nous obtenons le résultat suivant :

$$s_C = \frac{a_3 a_4 - a_5 a_2}{a_2^2 - a_1 a_3}, \quad (5.30)$$

et

$$t_C = \frac{a_2 a_4 - a_1 a_5}{a_2^2 - a_1 a_3}, \quad (5.31)$$

avec

$$a_2^2 - a_1 a_3 \neq 0.$$

A partir des équations (5.28) et (5.29), en remplaçant  $s$  et  $t$  par  $s_C$  et  $t_C$  exprimés par (5.30) et (5.31), nous pouvons ainsi estimer les points  $p_{s_C}$  et  $q_{t_C}$  sur les deux droites  $D_1$  et  $D_2$ , où elles sont le plus proche l'une de l'autre.

En pratique, si la distance minimale entre les deux droites, notée :

$$d(D_1, D_2) = \|\mathbf{p}_{s_C} - \mathbf{q}_{t_C}\|, \quad (5.32)$$

est inférieure à un seuil, la moyenne des coordonnées de  $\mathbf{p}_{s_C}$  et  $\mathbf{q}_{t_C}$  est retenue comme étant le point d'intersection de ces droites, et donc l'une des colonnes de la matrice de mélange recherchée. Sinon, on déduit que les deux droites ne partagent pas une source commune. Cette opération est répétée pour toutes les autres paires de droites.

Par ailleurs, et avant de passer à la dernière étape de l'approche proposée, il est à signaler qu'il est également possible de résoudre le problème considéré dans cette partie, à savoir estimer la distance minimale entre deux droites, par la méthode des moindres carrés. En effet, en considérant les équations paramétriques des droites (5.28) et (5.29), on peut procéder de la manière suivante :

$$\mathbf{p}_s - \mathbf{q}_t = (s\mathbf{u}^* - t\mathbf{v}^*) - \mathbf{e}^* + \mathbf{d}^* \quad (5.33)$$

$$= [\mathbf{u}^* \quad -\mathbf{v}^*] \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} - \mathbf{e}^* + \mathbf{d}^*. \quad (5.34)$$

Soit, en utilisant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} &= \mathbf{y} \\ [\mathbf{u}^* & - \mathbf{v}^*] = A \\ \mathbf{e}^* - \mathbf{d}^* &= \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

en cherche à estimer  $\mathbf{y}^*$  telle que :

$$\mathbf{y}^* = \underset{y}{\operatorname{argmin}} \|A\mathbf{y} - \mathbf{b}\|.$$

On peut résoudre ce problème par l'application de la méthode des moindres carrés, dont la solution est :

$$\mathbf{y}^* = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}.$$

De même que dans la méthode détaillée plus haut, si la distance minimale entre les deux droites est inférieure à un seuil, la moyenne des coordonnées de  $\mathbf{p}_{s_C}$  et  $\mathbf{q}_{t_C}$ , obtenues à partir des équations (5.28) et (5.29), est retenue comme étant l'une des colonnes de la matrice de mélange recherchée.

Pour terminer cette dernière partie de l'étape 2, et pour des raisons de simplicité, nous signalons que lors des simulations présentées dans la Section 5.4, notre choix s'est porté sur l'utilisation de la méthode détaillée ci-dessus (méthode des moindres carrés).

### 5.3.3 Etape d'estimation des cartes d'abondance

Après estimation du spectre de chaque matériau pur, la dernière étape de l'approche proposée consiste à extraire les  $M$  cartes d'abondance (sources) présentes dans les données considérées. Pour ce faire, nous appliquons une méthode des moindres carrés avec contrainte de non-négativité (NLS, pour "Non-negative Least Squares" en anglais) [14] sur chaque pixel de l'image considérée. Ceci est réalisé comme suit :

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{n}) = \underset{\mathbf{f}(\mathbf{n})}{\operatorname{argmin}} \|R\mathbf{f}(\mathbf{n}) - \mathbf{x}(\mathbf{n})\| \quad \forall n \in \{1 \dots N\} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\mathbf{n}) \geq 0. \quad (5.36)$$

Cette méthode nécessite que le nombre d'éléments non-nuls dans le vecteur estimé  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{n})$  soit au plus égal au nombre d'éléments dans le vecteur  $\mathbf{x}(\mathbf{n})$ . Ceci est vérifiée grâce à l'hypothèse 3. Par ailleurs, en ce qui concerne les contraintes physiques imposées de somme à un (5.7), on ajoute à la matrice de mélange, et aux vecteurs d'observation (associés à chaque pixel de l'image), une ligne constituée d'une valeur constante positive [15].

Pour une idée plus générale de l'approche proposée, un schéma résumant les trois étapes détaillées plus haut est donné au niveau de l'annexe D (figure D.2).

Il est à signaler que les deux premières étapes de BiS-Corr telles que présentées, sont directement applicables sur des images de type multispectral et hyperspectral de télédétection. Ceci étant, tout particulièrement pour les images de type hyperspectral, nous avons remarqué lors des premiers tests effectués sur données simulées, qu'après ajout d'un bruit blanc additif d'un rapport signal sur bruit variant entre 60 et 40 dB, il s'en suivait une diminution du nombre de zones bi-sources détectées dans l'étape 1, par rapport au nombre de zones détectées avec

la version non bruitée de la même image utilisée (pour le même seuil appliqué sur le critère de détection). Cette diminution du nombre de zones a engendré par la même occasion la diminution du nombre de droites bi-sources identifiées, qui sont nécessaires pour la suite de la démarche proposée (parties 2 et 3 de l'étape 2).

Pour éviter ce problème, et comme abordé au niveau de la Section 3.2 du Chapitre 3, nous avons entrepris une étape supplémentaire de réduction de dimension (avant l'étape 1 de détection de zones bi-sources). Ceci a été réalisé à l'aide d'une ACP (Analyse en Composantes Principales); on a ainsi pu fixer le nombre de bandes spectrales correspondant au nombre de sources choisies pour les simulations réalisées. L'étape en question permet essentiellement de réduire la complexité de l'étape d'extraction des endmembers, et réduit par la même occasion le bruit éventuellement contenu dans les données considérées [10].

Dans ce qui suit, et en particulier pour les images hyperspectrales, nous avons procédé de la manière suivante :

Nous avons transféré l'image observée  $X$  à travers une matrice  $(K \times L)$ , que l'on nomme  $B$  (avec  $K = M$ ). L'image obtenue, notée  $Z$ , est définie comme suit :

$$Z = BX, \quad (5.37)$$

avec  $Z \in \mathbb{R}^{K \times N}$ . La matrice  $B$  est définie comme suit :

$$B = D^{-1/2}H^T, \quad (5.38)$$

où  $D$  est la matrice diagonale  $(K \times K)$  des  $K$  plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance des observations initiales, et  $H$  représente une matrice  $(L \times K)$  dont les colonnes sont les  $K$  vecteurs propres unitaires associés à ces valeurs propres.

Après cette étape de réduction de dimension, nous appliquons BiS-Corr sur la matrice  $Z$  et obtenons en sortie de la Partie 3 de notre approche, une matrice  $(K \times M)$  que l'on nomme  $R_{red}$  composée des coordonnées de chaque spectre de endmember dans un espace réduit. La matrice de mélange recherchée (dans l'espace initial  $L \times M$ ) est ainsi obtenue comme suit :

$$R = HD^{1/2}R_{red}. \quad (5.39)$$

Enfin, le pseudo code de la méthode BiS-Corr est donné au niveau de l'algorithme 1.

## 5.4 Résultats expérimentaux

Dans la section en cours, nous présentons les différents tests effectués dans le cadre de cette étude. Nous rappelons d'abord les critères de performances utilisés pour évaluer la qualité des résultats obtenus, puis nous détaillons les résultats d'expérimentations.

### 5.4.1 Critères de performances

Pour procéder à l'évaluation quantitative des résultats des tests effectués, nous avons utilisé, comme dans le chapitre précédent, et après correction des permutations, deux critères de performances différents, qu'on rappelle ci-dessous.

**Pour les fractions d'abondance :**



```

Data: Image (multi) hyperspectrale avec  $N$  pixels,  $L$  bandes spectrales et  $M$  sources.
Result: Spectres des endmembers (matrice de mélange), fractions d'abondance (sources)
1 begin
2   if Image hyperspectrale then
3     | Etape de réduction de dimension avec  $K = M$ 
4   else
5     | (Image multispectrale)
6     |  $K = L$ 
7   end
8   /* Etape de détection de zones bi-sources (Etape I) */
9   for toutes les zones d'analyse  $\Omega$  do
10    | calcul de  $\rho_{x_\ell x_p}(\Omega) \quad \forall \ell, p \in \{1 \dots K\}$ , et  $\ell > p$ 
11    | if  $\min[\rho_{x_\ell x_p}(\Omega)] > \text{threshold } 1$  then
12      |  $\Omega$  est une zone bi-source.
13      | /* Etape d'identification de la matrice de mélange (Etape II) */
14      | calcul des paramètres  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$  de la droite engendrée par la zone bi-source
15      | (Partie 1)
16      | stockage de  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$  de la zone bi-source dans un vecteur colonne d'une
17      | matrice, appelée "MAT".
18    | end
19  end
20  classe 1  $\leftarrow$  la première colonne de MAT
21  for  $i := 2$  à  $[taille(MAT)]$  do
22    | calcul de la distance entre le premier vecteur (des classes définies) et le vecteur
23    | colonne (i) de MAT (Partie 2)
24    | if  $distance < \text{threshold } 2$  then
25      | le vecteur testé est attribué à la classe la plus proche
26    | else
27      | création d'une nouvelle classe (classe  $j$ , avec  $j \in \{2, \dots, J\}$  et  $J$  étant le
28      | nombre de classes)
29      | le vecteur testé est attribué à la classe  $j$ 
30    | end
31  end
32  for  $t := 1$  à  $J$  do
33    | calcul des paramètres  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$  pour chacune des classes disponibles (une unique
34    | droite pour chaque classe)
35  end
36  calcul de la distance minimale entre chaque couple de droites disponibles (Partie 3))
37  if  $distance < \text{threshold } 3$  then
38    | la moyenne des coordonnées des deux points les plus proches est retenue et stockée
39    | dans une matrice
40  end
41  /* Etape d'estimation des cartes d'abondance (Etape III) */
42  Estimation des sources comme indiqué dans la Section 5.3.3.
43 end

```

**Algorithm 1:** BiS-Corr

L'erreur quadratique moyenne normalisée.

$$NMSE = \frac{\|F_m - \hat{F}_m\|_F^2}{\|F_m\|_F^2}. \quad (5.40)$$

**Pour les spectres de réflectance :**

L'angle spectral, SAM (en degrés)

$$SAM = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{r}_m, \hat{\mathbf{r}}_m \rangle}{\|\mathbf{r}_m\| \cdot \|\hat{\mathbf{r}}_m\|}\right). \quad (5.41)$$

Par ailleurs, nous rappelons que pour la plupart des cas, la comparaison des méthodes est réalisée sur la base des valeurs moyennes de SAM et NMSE obtenus sur tous les endmembers.

#### 5.4.2 Tests effectués

Avant de détailler l'ensemble des tests effectués, il est à signaler que pour les raisons citées au niveau du Chapitre 4, ces derniers ont été réalisés sur des images simulées soit aléatoirement, ou bien à partir de sources réalistes. Ainsi, et afin d'analyser le comportement de notre méthode, nous avons dans un premier temps effectué des tests sur une image de type multispectral (Test 1). Lors de ces tests nous détaillons les résultats obtenus avec l'approche proposée en comparaison avec une méthode de la littérature, connue notamment en raison de sa disponibilité au niveau d'un logiciel commercial de traitement d'images en télédétection (appelé ENVI, pour "ENvironment for Visualizing Images").

Dans un autre volet, nous étudions le comportement de notre approche dans le cas d'images simulées mais de type hyperspectral cette fois-ci (Test 2 et 3). Dans ce cas, nous mettons en avant les résultats obtenus en comparaison avec ceux fournis par le biais d'autres méthodes de la littérature.

##### Test 1

Comme présenté ci-dessus, nous avons testé, dans une première expérience, notre méthode sur une image simulée multispectrale issue d'un mélange linéaire de cartes d'abondance réalistes. Plus précisément, ces données sont réalisées comme suit :

- Création de 8 cartes de fractions d'abondance réalistes, contenant chacune  $80 \times 80$  pixels. Ces dernières ont été créées à partir d'une classification réelle (voir [8] pour les détails), en moyennant les valeurs des pixels de la classification sur une fenêtre glissante de taille  $5 \times 5$  pixels. Les sources obtenues sont illustrées au niveau de la figure 5.4.
- Création de l'image observée par combinaison linéaire de ces sources avec une matrice de mélange contenant 8 spectres composés de 4 échantillons chacun. Les spectres utilisés ont été choisis arbitrairement à partir d'une bibliothèque spectrale appelée "USGS" [16]. Les 4 bandes spectrales, correspondant aux 4 observations obtenues, sont illustrées au niveau de la figure 5.5.
- Nous avons ajouté à l'image créée ci-dessus, un bruit blanc additif d'un rapport signal sur bruit de 65 dB.

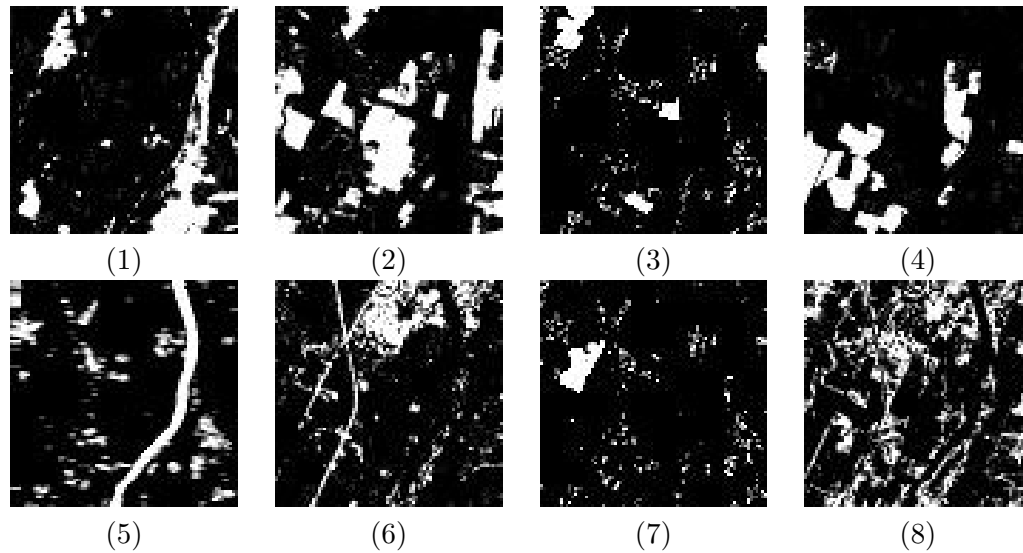


FIGURE 5.4 – Les huit cartes de fractions d'abondance utilisées dans le Test 1 (la couleur blanche représente les valeurs à un).

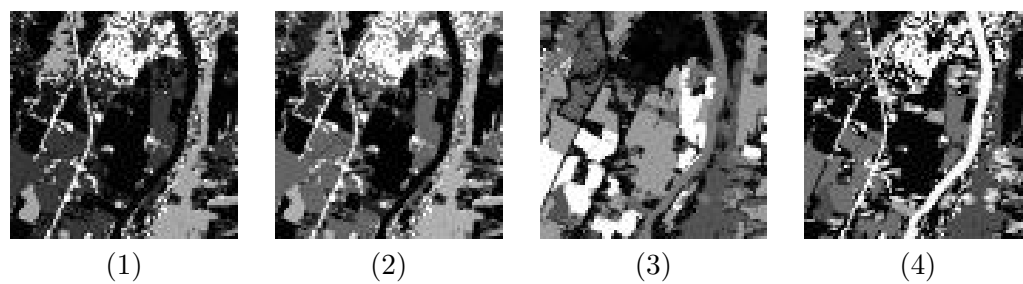


FIGURE 5.5 – Les quatre observations utilisées dans le Test 1.

L'application de notre approche (BiS-Corr) sur l'image détaillée ci-dessus, a engendré de bons résultats, comme mis en évidence au niveau du tableau 5.1. Dans ce dernier, nous détaillons les résultats obtenus en utilisant : (a) BiS-Corr et (b) la méthode SMACC [17], disponible comme mentionné dans un logiciel commercial de traitement d'images. Comme on peut le remarquer, notre méthode fournit de meilleurs résultats (en moyenne et quasiment pour toutes les sources) que ceux obtenus avec la méthode SMACC, et seule cette dernière échoue complètement pour l'obtention de certaines sources, à savoir les sources 3 et 7.

Les bons résultats obtenus avec notre approche sont dus à la présence, dans l'image utilisée, de zones bi-sources couvrant toutes les sources recherchées. En effet, sur les 5928 zones d'analyses  $\Omega$  parcourues et contenant chacune  $3 \times 5$  pixels, 566 ont été identifiées comme étant bi-sources. Ces zones bi-sources ont été détectées à l'aide du critère de corrélation présenté en Section 5.3.1, et le seuil choisi au niveau de cette étape d'identification a été fixé expérimentalement à 0,9985. Par ailleurs, dans la deuxième étape, nous avons pu, à l'aide des paramètres des droites engendrées par les zones bi-sources, et après classification de ces derniers, identifier 16 classes différentes, c.à.d. 16 droites correspondant aux différentes paires de sources.

TABLEAU 5.1 – Comparaison des résultats obtenus, en utilisant : (a) BiS-Corr, (b) SMACC.

|          |      | matériau<br>(1) | matériau<br>(2) | matériau<br>(3) | matériau<br>(4) | matériau<br>(5) | matériau<br>(6) | matériau<br>(7) | matériau<br>(8) | valeur<br>moyenne |
|----------|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| <b>a</b> | SAM  | 0,006           | 0,007           | 0,007           | 0,001           | 0,002           | 0,040           | 0,004           | 0,009           | <b>0,008</b>      |
|          | NMSE | 0,028           | 0,011           | 0,053           | 0,002           | 0,018           | 0,015           | 0,084           | 0,005           | <b>0,024</b>      |
| <b>b</b> | SAM  | 0,057           | 0,061           | 12,55           | 0,025           | 0,041           | 0,025           | 11,48           | 0,051           | <b>2,701</b>      |
|          | NMSE | 0,046           | 0,062           | 0,890           | 0,025           | 0,099           | 0,015           | 1,187           | 0,075           | <b>0,266</b>      |

Les cartes de fractions d'abondance estimées en utilisant BiS-Corr apparaissent dans la figure 5.6. Comme illustré dans cette dernière figure, les résultats obtenus sont en général similaires aux cartes réelles (figure 5.4). Ceci n'est pas le cas des cartes estimées avec la méthode SMACC représentées dans la figure 5.7. Dans cette dernière on peut remarquer la mauvaise estimation de certaines cartes obtenues, à savoir les cartes (2, 5, 7 et 8), où on remarque au niveau des cercles en rouge la présence de fractions d'abondance d'autres matériaux. L'erreur quadratique moyenne normalisée pour chacune des cartes estimée est également donnée dans le tableau 5.1 (b). Ici aussi on peut voir la bonne qualité des cartes obtenues par notre méthode, en comparaison à celles obtenues par SMACC.

## Test 2

Dans une deuxième expérience, nous avons testé notre méthode sur une image hyperspectrale artificielle. Cette dernière est issue d'un mélange linéaire de cartes d'abondance obtenues à l'aide d'une distribution de Dirichlet. Plus précisément, cette image a été réalisée comme suit :

- Création de 3 cartes de fractions d'abondance, contenant chacune  $50 \times 50$  échantillons (le nombre d'échantillons utilisé est arbitraire). Ces dernières ont été obtenues à l'aide d'une distribution de Dirichlet, connue pour être adaptée pour simuler ce type de données. Plus précisément, les cartes utilisées ont été réalisées de manière à ne garder que les pixels

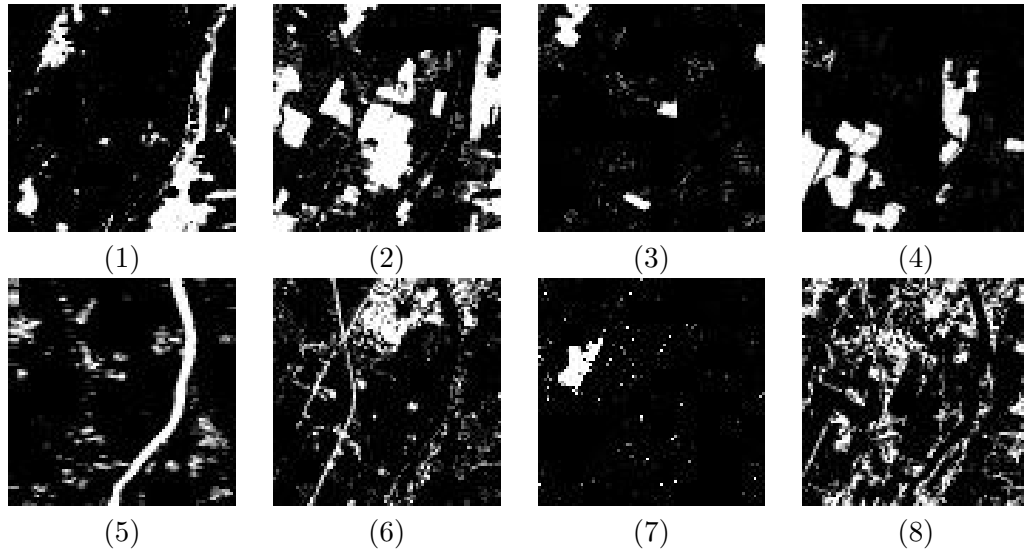


FIGURE 5.6 – Cartes estimées avec BiS-Corr.

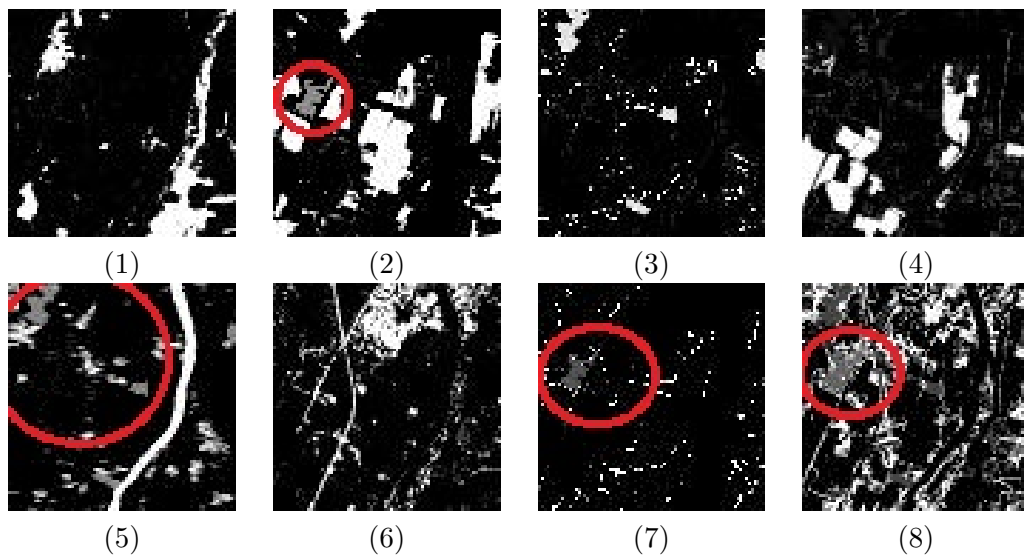


FIGURE 5.7 – Cartes estimées avec la méthode SMACC.

avec des fractions d'abondance inférieures à 0,8 (c.à.d. non purs). Pour plus de détails concernant les fractions d'abondance obtenues, il est possible de consulter [18, 19], en particulier la fonction matlab utilisée, appelée "spectMixGen".

- Modifications des cartes obtenues ci-dessus en injectant 3 zones bi-sources, contenant chacune  $5 \times 5$  échantillons, et ayant une source commune pour chaque paire de zones, c'est à dire pour la première zone : présence de la source 1 et 2, pour la deuxième zone : présence de la source 1 et 3, et enfin pour la troisième zone : présence de la source 2 et 3.
- Mélange de ces 3 cartes d'abondance en utilisant le modèle linéaire (5.1) avec une matrice de mélange composée des spectres de 3 endmembers (avec 420 longueurs d'onde). Ces derniers spectres ont été choisis arbitrairement à partir de la bibliothèque spectrale "USGS" [16].

Dans ce qui suit, nous avons effectué nos tests sur l'image présentée ci-dessus à laquelle nous avons ajouté un bruit blanc additif d'un rapport signal sur bruit de 40 dB<sup>20</sup>. Le nuage de points en 2D (correspondant aux bandes spectrales 1 et 2) engendré par cette image est présenté au niveau de la figure 5.8.

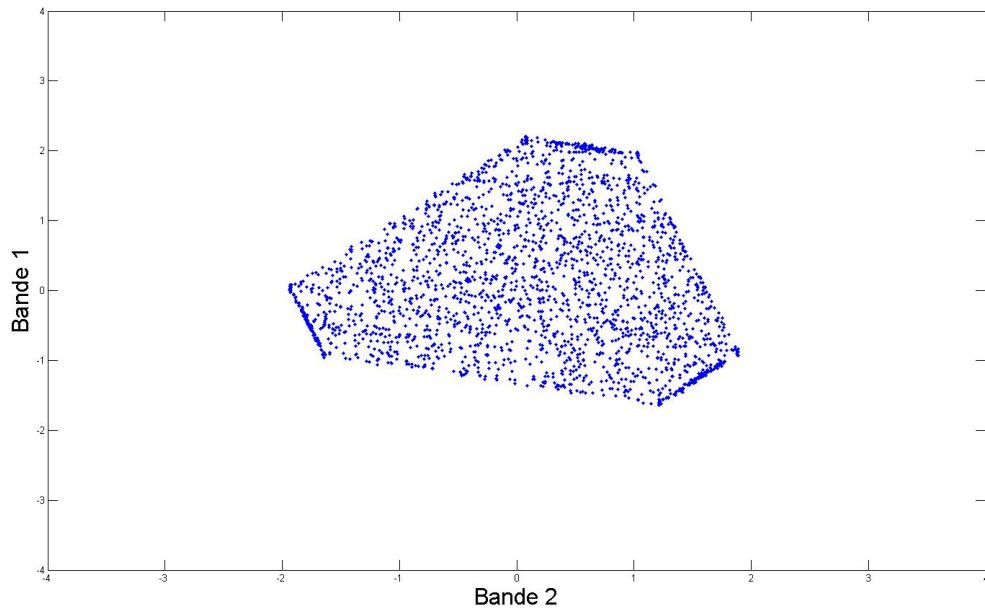


FIGURE 5.8 – Nuage de points en 2D correspondant aux bandes spectrales 1, 2 (après une étape de réduction de dimension)

Ainsi, comme indiqué dans les détails de notre approche, après avoir détecté toutes les zones bi-sources de cette image, et après classification des paramètres engendrés par ces zones (la deuxième étape), nous obtenons les différentes droites, illustrées dans la figure 5.9. Comme

20. Le niveau de bruit considéré dans cette expérimentation est plus important que celui utilisé dans le premier test, car dans ce test (ainsi que les suivants) nous utilisons des images de type hyperspectral, connues pour être beaucoup plus bruitées que les images multispectrales. Par ailleurs, la majorité des méthodes de la littérature ont été testées en utilisant ce niveau de bruit (40-45 dB).

détaillé plus haut au niveau de la Section 5.2, les droites engendrées par les différentes zones détectées dans cette expérimentation, correspondent au cas de figure le plus difficile à résoudre, c.à.d. le cas où les points associés à chaque paire de sources ne couvrent pas l'ensemble des segments possibles, en particulier leurs extrémités. Ces dernières correspondent à des pixels purs, et sont illustrées par les trois petits cercles, dans la figure 5.9.

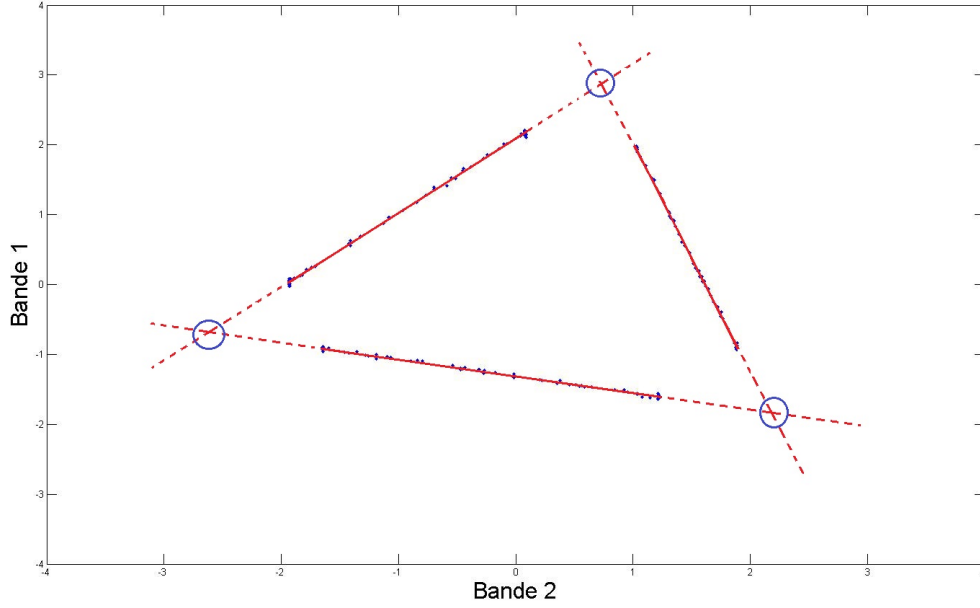


FIGURE 5.9 – Droites bi-sources engendrées par les zones bi-sources contenues dans l'image utilisée dans le Test 2 (bandes spectrales 1 et 2 après une étape de réduction de dimension)

De ce fait, et sous l'hypothèse d'existence d'un point commun entre chaque paire de droites, les coordonnées de chaque spectre de endmember, présent au niveau de chaque colonne de la matrice de mélange, sont précisément estimées, en calculant les points d'intersection de chaque paire de droites (3<sup>ème</sup> partie de l'étape 2). Ces points d'intersection sont illustrés par les petits cercles, dans la figure 5.9.

Dans la suite de cette expérimentation, nous détaillons les résultats numériques obtenus avec notre méthode, en comparaison avec ceux fournis par d'autres méthodes géométriques de la littérature (voir le Chapitre 3 pour plus de détails) ; d'une part celles faisant l'hypothèse de présence de pixels purs, à savoir : VCA (Vertex Component Analysis) [20], OSP (Orthogonal Subspace Projection) [21] et N-FINDR [22], et d'autre part celles utilisant des approches de minimisation du volume du simplexe formé par les données, à savoir : MVSA (Minimum Volume Simplex Analysis) [23] et SISAL (Simplex Identification via Split Augmented Lagrangian) [19].

Nous rappelons que toutes ces méthodes de la littérature fournissent seulement la matrice de mélange recherchée, et ainsi nous présentons dans le tableau 5.2, les SAM (permettant la comparaison des performances d'estimation des spectres de endmember) obtenus en utilisant l'approche que nous proposons en comparaison avec ceux obtenus par les méthodes citées ci-dessus. Par ailleurs, il est possible d'estimer les sources par simple application de la NLS (comme détaillé

dans l'étape 3 de notre approche).

TABLEAU 5.2 – Comparaison des SAM obtenus, en utilisant : (a) BiS-Corr, (b) VCA, (c) OSP, (d) N-FINDR, (e) MVSA et (f) SISAL

|                 | matériau<br>(1) | matériau<br>(2) | matériau<br>(3) | valeur<br>moyenne |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| <b>BiS-Corr</b> | <b>0,04</b>     | <b>0,09</b>     | <b>0,06</b>     | <b>0,05</b>       |
| <b>VCA</b>      | 1,07            | 3,48            | 1,86            | 1,60              |
| <b>OSP</b>      | 1,21            | 10,01           | 3,97            | 3,79              |
| <b>N-FINDR</b>  | 6,78            | 3,64            | 1,88            | 3,08              |
| <b>MVSA</b>     | 0,04            | 0,18            | 0,08            | 0,08              |
| <b>SISAL</b>    | 0,03            | 0,19            | 0,06            | 0,07              |

La superposition des spectres utilisés dans ce test ainsi que leurs estimations est donnée dans les figures 5.10 à 5.15.

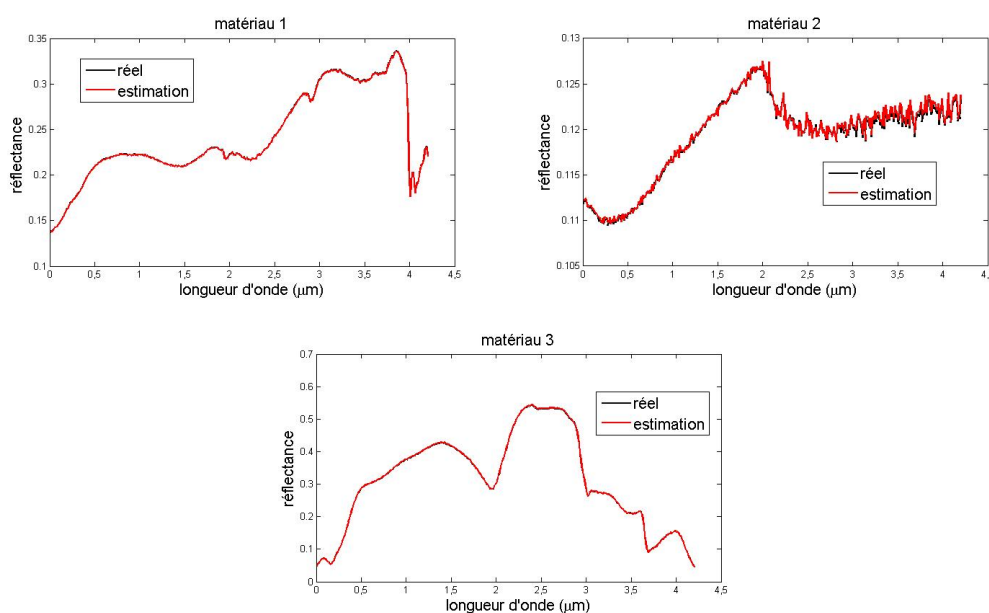


FIGURE 5.10 – Superposition des spectres utilisés et leurs estimations, obtenues avec BiS-Corr.

Nous constatons d'après les résultats détaillés ci-dessus, ou bien dans les figures correspondantes, que malgré l'absence de pixels purs et la présence d'un bruit additif, notre approche est en mesure de déterminer avec de très bonnes performances les spectres recherchés. Ceci n'est bien sûr pas le cas des méthodes faisant l'hypothèse de présence de pixels purs. Nous remarquerons par ailleurs, que seuls les résultats obtenus avec SISAL et MVSA présentent des performances du même ordre que celles obtenues par notre méthode, ce qui n'est pas surprenant



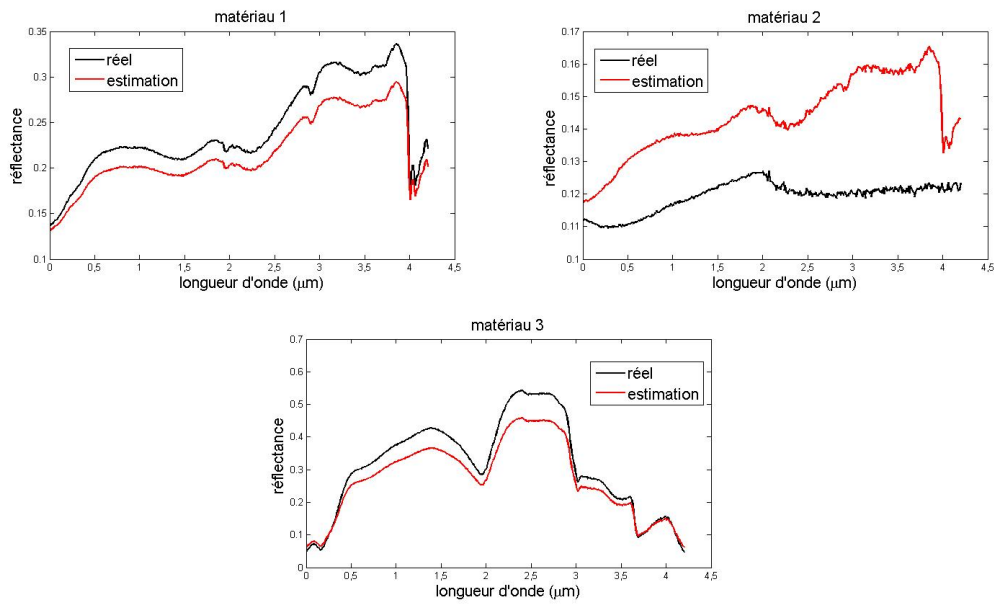


FIGURE 5.11 – Superposition des spectres utilisés et leurs estimations, obtenues avec VCA.

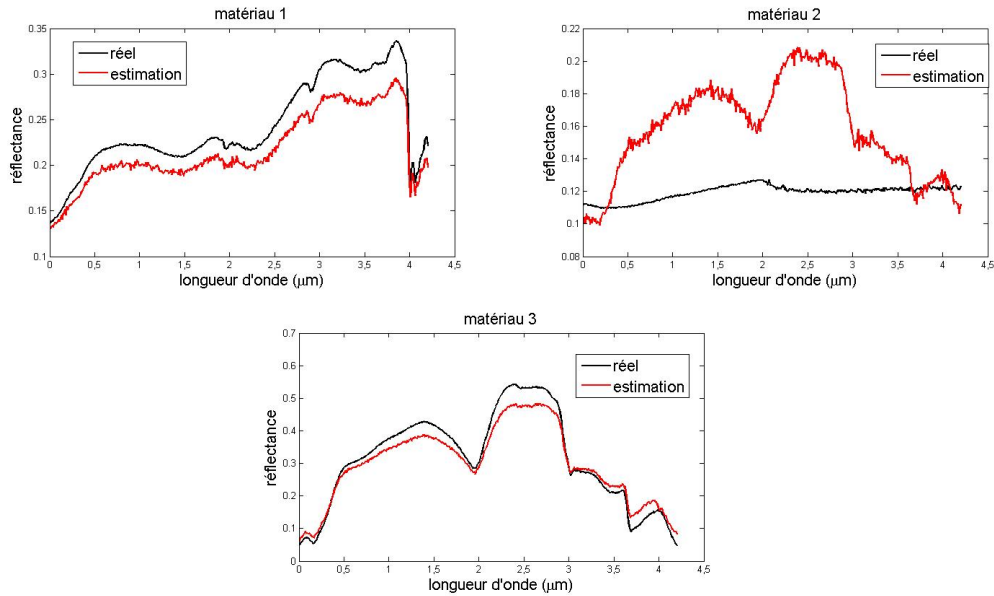


FIGURE 5.12 – Superposition des spectres utilisés et leurs estimations, obtenues avec OSP.

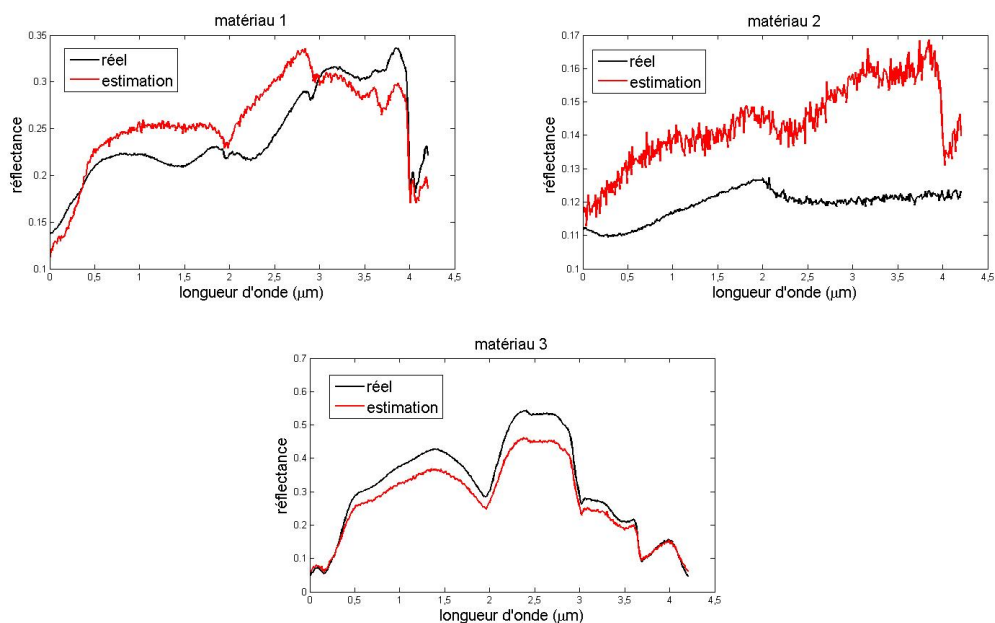


FIGURE 5.13 – Superposition des spectres utilisés et leurs estimations, obtenues avec N-FINDR.

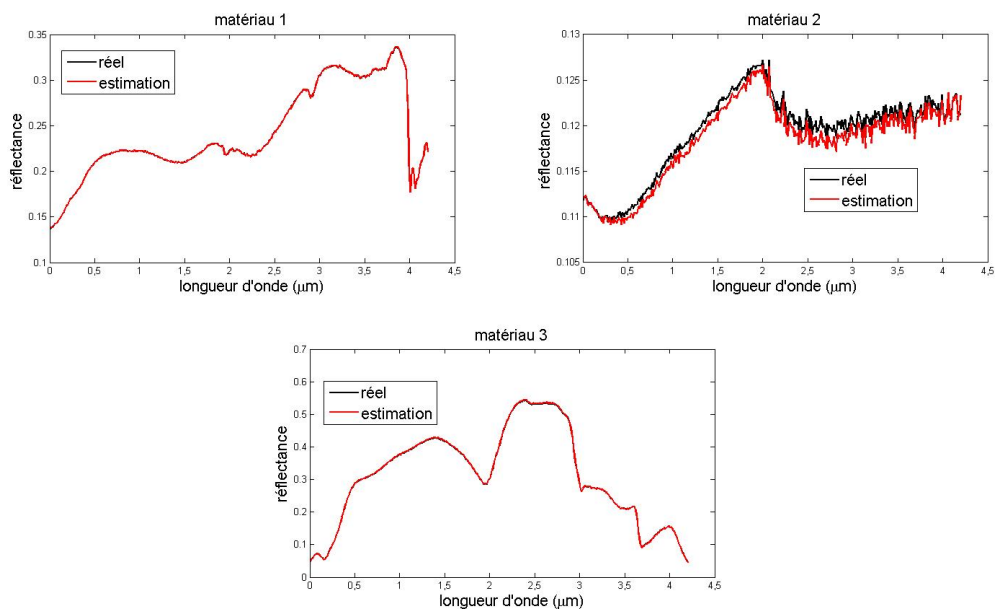


FIGURE 5.14 – Superposition des spectres utilisés et leurs estimations, obtenues avec MVSA.

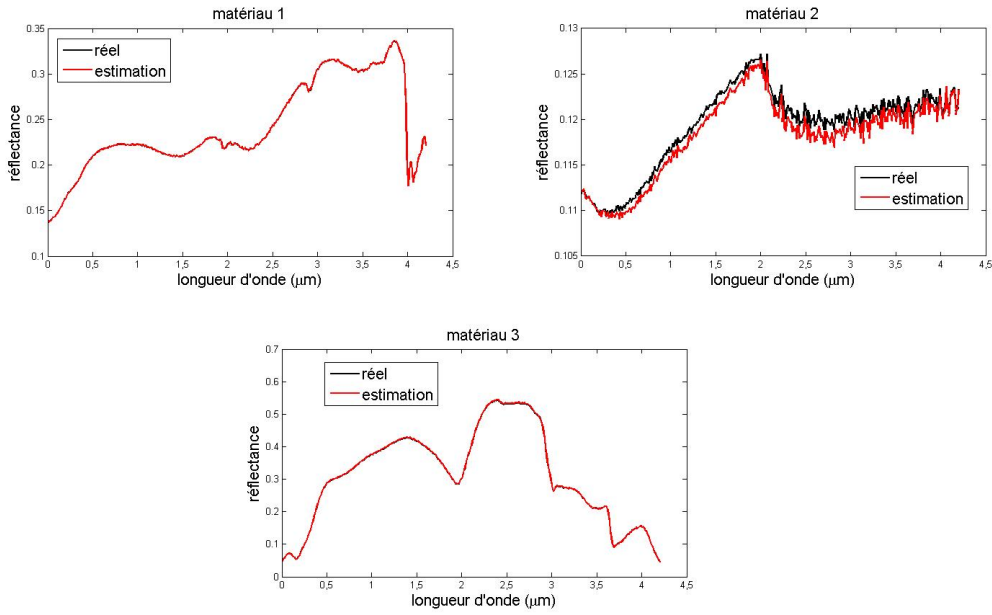


FIGURE 5.15 – Superposition des spectres utilisés et leurs estimations, obtenues avec SISAL.

car ces dernières méthodes n'ont pas besoin de pixels purs pour pouvoir estimer les spectres recherchés. Néanmoins, en comparant les résultats détaillés dans le tableau 5.2, ainsi que l'allure des spectres obtenus en sortie de notre approche avec ceux obtenus par les autres méthodes, on peut clairement constater que notre démarche donne les meilleurs résultats, avec un SAM  $< 0,1$  (en degrés) pour tous les spectre estimés (voir les valeurs en gras dans le tableau 5.2).

### Test 3

Nous présentons dans cette partie des tests, les résultats obtenus avec une image hyper-spectrale simulée. Il sera également fourni dans la suite de cette expérimentation, les résultats obtenus en comparaison avec ceux fournis par d'autres méthodes de la littérature. L'image utilisée dans nos tests est réalisée comme suit :

- Création de 8 cartes de fractions d'abondance réalistes, de la même manière que pour le premier test ( $80 \times 80$  pixels). Ces sources sont illustrées au niveau de la figure 5.4.
- Création de l'image hyperspectrale par combinaison linéaire de ces sources avec une matrice de mélange contenant 8 spectres de 224 longueurs d'onde. Les spectres utilisés ont été choisis arbitrairement à partir d'une bibliothèque spectrale appelée "USGS" [16]. La composition RVB (Rouge, Vert, Bleu) des observations est représentée au niveau de la figure 5.16.

Dans ce qui suit, nous avons effectué nos tests sur l'image présentée ci-dessus à laquelle nous avons ajouté un bruit blanc additif d'un rapport signal sur bruit de 45 dB. Ainsi, après étape de réduction de dimension, détection de toutes les zones bi-sources de cette image, et classification des paramètres obtenus au niveau de l'étape 2 (détaillée plus haut, dans la Section 5.3.2), nous obtenons les différentes droites bi-sources illustrées dans la figure 5.17 (droites en rouge). Pour

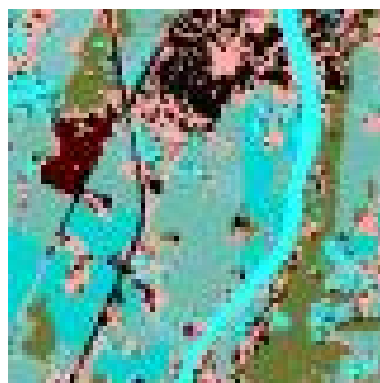


FIGURE 5.16 – Composition RVB de l'image hyperspectrale observée.

des raison de lisibilité, nous avons choisi de présenter les bandes spectrales 1, 2 et 4 après une étape de réduction de dimension.

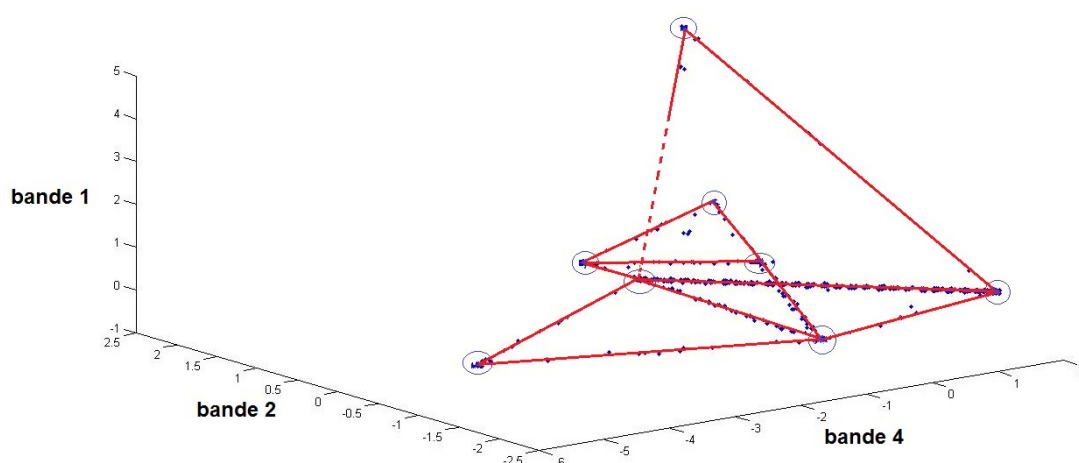


FIGURE 5.17 – Droites bi-sources engendrées par les zones bi-sources contenues dans l'image utilisée dans le Test 3 (bandes spectrales 1, 2 et 4 après une étape de réduction de dimension).

Dans la figure 5.17, on peut clairement remarquer les différentes droites engendrées par les zones bi-sources contenues dans l'image. De ce fait, les coordonnées de chaque spectre de endmember, présent au niveau de chaque colonne de la matrice de mélange, sont précisément estimées, en calculant les points d'intersection des paires de droites correspondant à une source commune (3<sup>ème</sup> partie de l'étape 2). Ces points d'intersection sont illustrés par un petit cercle dans la figure 5.17. On peut également voir dans la figure 5.18 la superposition d'un des spectres purs utilisés dans ce test ainsi que son estimation, qui épouse parfaitement la forme du spectre initial.

Les cartes de fractions d'abondance estimées, sont quant à elles présentées dans la figure 5.19. Dans cette dernière figure, on remarque clairement les bons résultats obtenus en utilisant la démarche proposée. Ces cartes sont, comme pour le premier test, similaires aux cartes réelles présentées en figure 5.4.

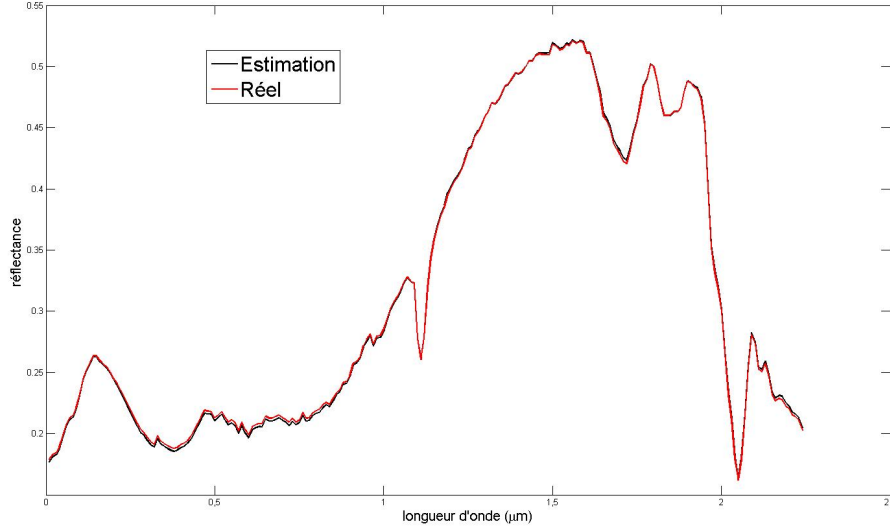


FIGURE 5.18 – Superposition d'un des spectres purs de réflectance avec son estimation, obtenue avec l'approche proposée.

Nous détaillons par ailleurs, dans ce qui suit, les résultats numériques obtenus en utilisant l'approche que nous proposons en comparaison avec ceux obtenus par d'autres méthodes de la littérature. Nous commençons cette comparaison avec des méthodes pouvant estimer la matrice de mélange et les sources en parallèle, à savoir les méthodes SMACC [17] (disponible comme mentionné, dans un logiciel commercial de traitement d'images) et MVC-NMF [24]. Pour être plus précis, soulignons qu'en ce qui concerne la méthode MVC-NMF, nous avons utilisé 10 initialisations aléatoires différentes et nous présentons dans ce qui suit le résultat global, c.à.d. la moyenne des 10 réalisations.

Puis, dans un 2<sup>ème</sup> temps, nous proposons de comparer les performances de notre approche avec d'autres méthodes effectuant seulement une identification de la matrice de mélange, à savoir les méthodes MVSA (Minimum Volume Simplex Analysis) [23], SISAL (Simplex Identification via Split Augmented Lagrangian) [19] et VCA (Vertex Component Analysis) [20]. Dans cette dernière partie des tests, nous comparons seulement les performances d'estimation des spectres de endmember. Pour rappel, il est possible d'estimer les sources en utilisant la NLS (comme détaillé dans l'étape 3 de notre approche).

Les résultats de cette expérimentation sont détaillés dans les tableaux 5.3 et 5.4. Comme indiqué, notre approche présente de très bonnes performances par rapport aux méthodes comparées, qui pour rappel, font partie de celles étant les plus utilisées dans la littérature.

En ce qui concerne le tableau 5.3, nous remarquons dans le détail des performances obtenues, que seules les méthodes SMACC et MVC-NMF échouent complètement pour l'obtention de certaines sources (par exemple, en ce qui concerne SMACC : les sources 5 et 7). Les cartes estimées avec la méthode SMACC sont données à titre d'exemple, en figure 5.20. Dans cette figure, et comme indiqué au niveau du même tableau, il est possible de voir la mauvaise qualité d'estimation des sources 5 et 7, ce qui n'est pas le cas pour notre méthode.

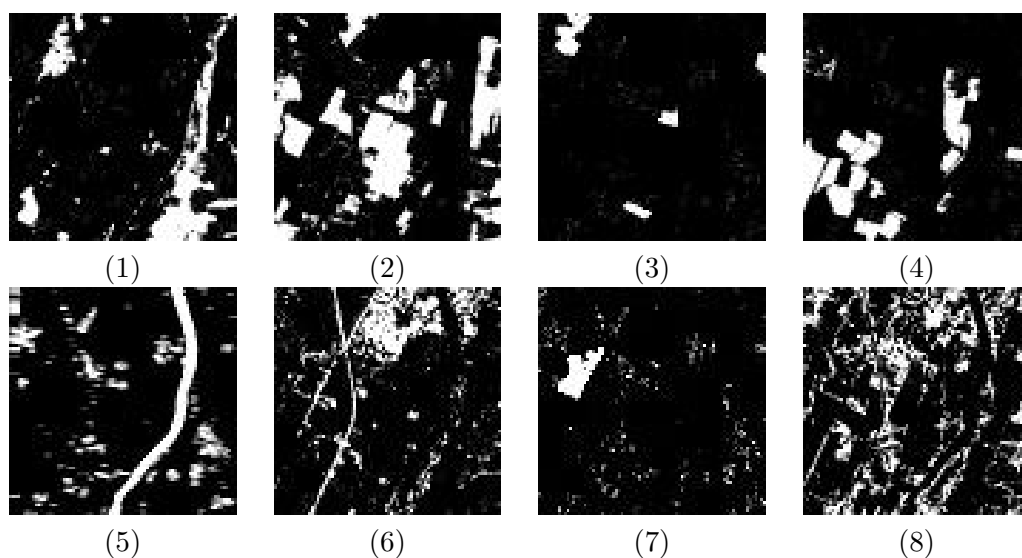


FIGURE 5.19 – Cartes estimées avec BiS-Corr.

TABLEAU 5.3 – Comparaison des SAM et NMSE obtenus, en utilisant : (a) BiS-Corr, (b) SMACC et (c) MVC-NMF.

|          |      | matériau<br>(1) | matériau<br>(2) | matériau<br>(3) | matériau<br>(4) | matériau<br>(5) | matériau<br>(6) | matériau<br>(7) | matériau<br>(8) | valeur<br>moyenne |
|----------|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| BiS-Corr | SAM  | 0,04            | 0,02            | 0,08            | 0,01            | 0,01            | 0,29            | 0,21            | 0,02            | <b>0,07</b>       |
|          | NMSE | 0,002           | 0,003           | 0,020           | 0,004           | 0,003           | 0,007           | 0,008           | 0,003           | <b>0,006</b>      |
| SMACC    | SAM  | 0,39            | 8,87            | 0,33            | 0,34            | 0,25            | 0,58            | 0,74            | 0,28            | 1,31              |
|          | NMSE | 0,025           | 0,260           | 0,120           | 0,099           | 0,430           | 0,048           | 0,205           | 0,045           | 0,137             |
| MVC-NMF  | SAM  | 10,31           | 14,20           | 12,66           | 13,67           | 12,79           | 15,69           | 10,99           | 10,17           | 12,5              |
|          | NMSE | 0,405           | 0,527           | 0,421           | 0,472           | 0,432           | 0,338           | 1,934           | 0,323           | 0,606             |

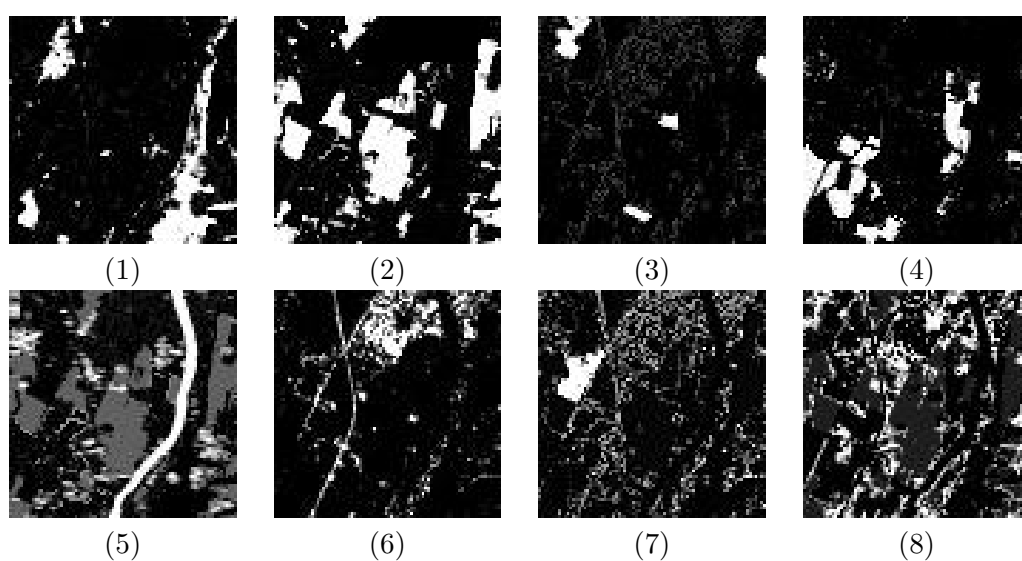


FIGURE 5.20 – Cartes estimées avec la méthode SMACC.

Par ailleurs, en ce qui concerne les autres méthodes de la littérature utilisées dans cette comparaison, et dans le but de visualiser la qualité des spectres estimés, nous illustrons dans la figure 5.21, la superposition du spectre d'un des matériaux utilisés et de ses estimations par l'approche proposée et par d'autres méthodes de la littérature. Le spectre estimé par notre approche épouse parfaitement la forme du spectre initial, ce qui n'est pas le cas des spectres issus de MVSA et SISAL.

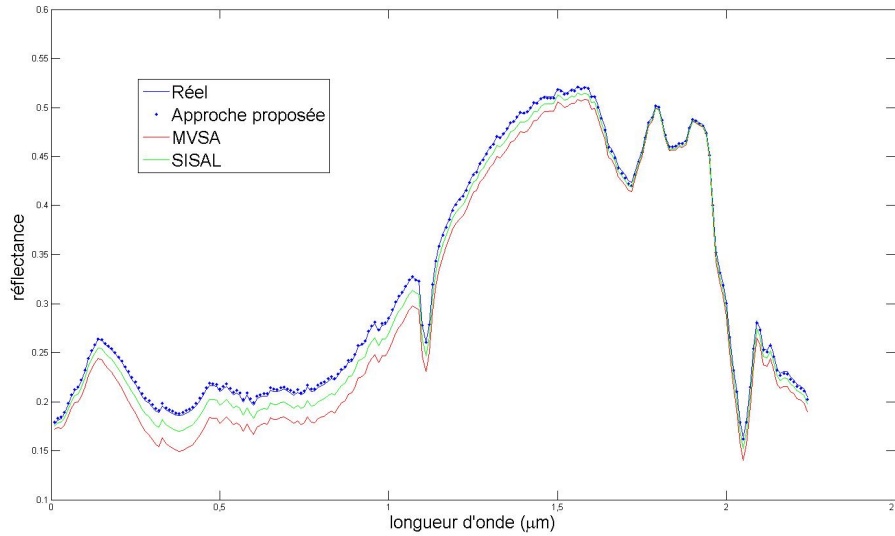


FIGURE 5.21 – Superposition d'un des spectres de réflectance avec plusieurs estimations, obtenues en utilisant : l'approche proposée, SISAL et MVSA

Comme indiqué au niveau du tableau 5.4, notre méthode fournit de bonnes performances, avec un SAM moyen de l'ordre de 0,07 (en degrés). Parmi les méthodes utilisées dans cette comparaison, seule la méthode VCA donne un résultat (en moyenne) comparable au nôtre, ce qui n'est pas surprenant, car l'image utilisée contient des pixels purs. Pour rappel, et comme indiqué dans le Chapitre 3, la méthode VCA va chercher les pixels les plus purs de l'image, ce qui induit le résultat présenté ci-dessus. Malgré l'efficacité reconnue de cette dernière (dans le cas de pixels purs), nous arrivons à obtenir de meilleures performances (en moyenne). A ce titre, il est également à rappeler que les méthodes de ce type, c.à.d. faisant l'hypothèse de la présence de pixels purs, ne sont pas aussi efficaces pour des images dépourvues de pixels purs, ce qui n'est pas le cas pour notre méthode (voir Test 2).

Les résultats présentés, pour notre méthode, dans les tableaux 5.3 et 5.4 sont très encourageants et sont, pour la plupart des matériaux considérés, meilleurs que ceux obtenus avec les méthodes de la littérature utilisées dans nos tests.

Pour terminer, nous proposons dans l'annexe D une nouvelle variante de la méthode BiS-Corr. Cette dernière utilise une nouvelle manière de classifier les paramètres des droites engendrées par les zones bi-sources présentes dans l'image. Enfin, nous présentons également quelques résultats de tests effectués en comparaison avec la version initiale présentée plus haut dans ce chapitre.

TABLEAU 5.4 – Comparaison des SAM obtenus, en utilisant : (a) BiS-Corr, (b) VCA, (c) SISAL et (d) MVSA.

|                 | matériau<br>(1) | matériau<br>(2) | matériau<br>(3) | matériau<br>(4) | matériau<br>(5) | matériau<br>(6) | matériau<br>(7) | matériau<br>(8) | valeur<br>moyenne |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| <b>BiS-Corr</b> | 0,04            | 0,02            | 0,08            | 0,01            | 0,01            | 0,29            | 0,21            | 0,02            | <b>0,07</b>       |
| <b>VCA</b>      | 0,10            | 0,09            | 0,07            | 0,08            | 0,07            | 0,14            | 0,17            | 0,06            | 0,09              |
| <b>SISAL</b>    | 1,67            | 2,31            | 0,52            | 0,73            | 0,38            | 1,15            | 3,95            | 1,85            | 1,39              |
| <b>MVSA</b>     | 1,42            | 0,40            | 0,64            | 0,40            | 0,44            | 2,73            | 4,90            | 0,92            | 1,32              |

## 5.5 Conclusion

Dans cette étude, nous avons proposé une nouvelle approche de démixage non supervisée, basée sur la parcimonie spatiale des images de type multi- et hyper-spectral. L'approche en question est composée de trois étapes majeures :

- (i) Détermination de l'ensemble des zones bi-sources présentes dans les données examinées, en utilisant un critère de détection basé sur la corrélation.
- (ii) Identification des colonnes de la matrice de mélange à partir des intersections des droites générées par les zones bi-sources.
- (iii) Reconstruction des sources recherchées en utilisant une méthode des moindres carrés avec contrainte de non-négativité.

Nous avons validé expérimentalement l'efficacité de notre méthode en utilisant des mélanges simulés à partir de sources réalistes. En comparaison avec d'autres méthodes de la littérature, notre approche fournit des résultats satisfaisants et très encourageants. En effet, et en tenant compte des hypothèses détaillées en introduction de notre méthode, c.à.d. principalement la présence de zones bi-sources et une source commune pour certaines paires de zones détectées, nous obtenons de très bons résultats, démontrés à travers les différents résultats des tests effectués et détaillés plus haut. Notre objectif pour la suite de cette étude sera consacré à l'extension de notre approche, en particulier en ce qui concerne l'utilisation d'autres critères de détection de zones bi-sources, ainsi que l'exploration d'autres méthodes de classification des zones d'intérêt. Il sera également question de compléter la validation de l'approche proposée à l'aide d'images réelles de télédétection contenant bien sûr une vérité terrain, et enfin d'essayer de réduire au maximum le recours à des seuils heuristiques fixés manuellement dans les expérimentations détaillées plus haut. En d'autres termes, nous nous consacrerons en particulier à l'automatisation de l'approche proposée.





# Bibliographie

- [1] A. Jourjine, S. Rickard, and O. Yilmaz, “Blind separation of disjoint orthogonal signals : Demixing n sources from 2 mixtures,” in *Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP / Istanbul, Turkey)*. IEEE, 2000, vol. 5, pp. 2985–2988.
- [2] O. Yilmaz and S. Rickard, “Blind separation of speech mixtures via time-frequency masking,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 52, no. 7, pp. 1830–1847, July 2004.
- [3] P. Georgiev, F. Theis, and A. Cichocki, “Sparse component analysis and blind source separation of underdetermined mixtures,” *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 16, no. 4, pp. 992–996, July 2005.
- [4] Y. Li, S-I. Amari, A. Cichocki, D.W.C Ho, and S. Xie, “Underdetermined blind source separation based on sparse representation,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 54, no. 2, pp. 423–437, February 2006.
- [5] Y. Deville and M. Puigt, “Temporal and time-frequency correlation-based blind source separation methods. part i : determined and underdetermined linear instantaneous mixtures,” *Signal Processing*, vol. 87, no. 3, pp. 374–407, March 2007.
- [6] F. Abrard and Y. Deville, “A time-frequency blind signal separation method applicable to underdetermined mixtures of dependent sources,” *Signal Processing*, vol. 85, no. 7, pp. 1389–1403, July 2005.
- [7] Y. Deville, D. Bissessur, M. Puigt, S. Hosseini, and H. Carfantan, “A time-scale correlation-based blind separation method applicable to correlated sources,” in *European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN / Bruges, Belgium)*, 2006, pp. 337–343.
- [8] M.S. Karoui, Y. Deville, S. Hosseini, and A. Ouamri, “Blind spatial unmixing of multispectral images : New methods combining sparse component analysis, clustering and non-negativity constraints,” *Pattern Recognition*, vol. 45, no. 12, pp. 4263–4278, December 2012.
- [9] N. Keshava and J.F. Mustard, “Spectral unmixing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, no. 1, pp. 44–57, January 2002.
- [10] J.M. Bioucas-Dias, A. Plaza, N. Dobigeon, M. Parente, Q. Du, P. Gader, and J. Chanussot, “Hyperspectral unmixing overview : Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches,” *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 5, no. 2, pp. 354–379, April 2012.
- [11] S. Wold, “Principal component analysis,” *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 2, no. 1-3, pp. 37–52, August 1987.
- [12] A. Smilde, R. Bro, and P. Geladi, *Multi-way analysis with applications in the chemical sciences*, John Wiley and Sons, England, 2004.
- [13] P.J. Schneider and D.H. Eberly, *Geometric Tools for Computer Graphics*, Elsevier Science, USA, 2003.

- [14] C.L. Lawson and R.J. Hanson, *Solving Least Squares Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [15] D.C. Heinz and C-I. Chang, "Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, no. 3, pp. 529–545, March 2001.
- [16] R. N. Clark, G. A. Swayze, R. Wise, E. Livo, T. Hoefen, R. Kokaly, and S. J. Sutley, "USGS digital spectral library splib06a," in *U.S. Geological Survey, Digital Data Series 231*, <http://speclab.cr.usgs.gov/spectral.lib06>, 2007.
- [17] J. Gruninger, A.J. Ratkowski, and M.L. Hoke, "The sequential maximum angle convex cone (smacc) endmember model," in *Algorithms for Multispectral, Hyperspectral and Ultraspectral Imagery*. SPIE, 2004, vol. 5425, no. 1.
- [18] J.M. Bioucas-Dias, "<http://www.lx.it.pt/bioucas/code.htm>," .
- [19] J.M. Bioucas-Dias, "A variable splitting augmented lagrangian approach to linear spectral unmixing," in *IEEE Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing Evolution in Remote Sensing (WHISPERS / Grenoble, France)*, 2009.
- [20] J.M.P. Nascimento and J.M. Bioucas-Dias, "Vertex component analysis : A fast algorithm to unmix hyperspectral data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, no. 4, pp. 898–910, April 2005.
- [21] J.C. Harsanyi and C-I. Chang, "Hyperspectral image classification and dimensionality reduction : An orthogonal subspace projection approach," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 32, no. 4, pp. 779–785, July 1994.
- [22] M.E. Winter, "N-findr : an algorithm for fast autonomous spectral end-member determination in hyperspectral data," in *SPIE conference on Imaging Spectrometry V*, 1999, vol. 3753, pp. 266–275.
- [23] J. Li and J.M. Bioucas-Dias, "Minimum volume simplex analysis : a fast algorithm to unmix hyperspectral data," in *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 2008, vol. 3, pp. 250–253.
- [24] L. Miao and H. Qi, "Endmember extraction from highly mixed data using minimum volume constrained nonnegative matrix factorization," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 45, no. 3, pp. 765–777, March 2007.

# Conclusion générale et perspectives

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés au traitement du problème de la Séparation Aveugle de Sources (SAS) pour des applications de télédétection.

Notre démarche a été essentiellement motivée par le fait que dans la majorité des techniques de traitement d'images et en particulier la classification pixel par pixel des éléments de l'image, des erreurs importantes peuvent se produire en raison de la présence de pixels mélangés, phénomène dû à la mauvaise résolution spatiale de certains capteurs utilisés.

Pour éviter cette situation, nous avons mis en place des méthodes originales de démixage spectral fondées sur des classes usuelles de méthodes de SAS.

Dans le premier chapitre, nous avons d'abord présenté un résumé concernant l'imagerie de télédétection ainsi que la problématique considérée. Nous avons ensuite abordé dans le Chapitre 2, les principes de base de la SAS pour des mélanges Linéaires Instantanés (LI) ; il s'en est suivi un état de l'art des méthodes classiques de SAS, avec une focalisation sur les classes de méthodes qui ont été exploitées lors du développement de nos méthodes, en l'occurrence l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI), la Factorisation en Matrices Non-négatives (NMF) et enfin l'Analyse en Composantes Parcimonieuses (ACPa).

Les méthodes de démixage spectral les plus connues de la littérature ont été détaillées au Chapitre 3, dans lequel nous avons commencé par définir le modèle linéaire sur lequel est basé notre travail. Nous avons également présenté les principales méthodes dites "géométriques" de démixage, avec ou sans pixels purs. Enfin nous avons fait un tour d'horizon des méthodes classiques de SAS appliquées à l'imagerie spatiale, toujours avec une attention particulière à l'ACI, la NMF, et l'ACPa.

Notre première contribution a été détaillée dans le Chapitre 4. Celle-ci est basée sur la combinaison de deux grandes classes de méthodes de SAS : l'ACI et la NMF. Dans ce chapitre, nous avons commencé par mettre en évidence quelques limites liées à l'utilisation d'une seule de ces méthodes. Nous avons ensuite modifié une méthode standard d'ACI, à l'aide des contraintes physiques imposées dans les applications de télédétection. Les sorties obtenues au niveau de cette ACI modifiée ont enfin été utilisées pour initialiser une méthode de NMF. La méthode proposée a été validée expérimentalement dans la dernière partie du chapitre à l'aide de données simulées réalistes ainsi que d'images réelles sans vérité terrain.

Les résultats obtenus avec notre méthode ont été satisfaisants en comparaison avec ceux obtenus par les méthodes de la littérature utilisées dans nos tests.

La deuxième méthode développée a été détaillée au niveau du Chapitre 5. Pour cette dernière, nous nous sommes orientés vers les méthodes fondées sur la parcimonie ainsi que sur des propriétés géométriques. Nous avons commencé par mettre en avant quelques propriétés facilitant

la présentation des hypothèses considérées dans la méthode proposée, puis nous avons fourni les grandes lignes de cette méthode qui est basée sur la détermination des zones bi-sources contenues dans l'image utilisée, ceci à l'aide d'un critère de corrélation. A partir des intersections des droites générées par ces zones bi-sources, nous avons détaillé le moyen d'obtention des colonnes de la matrice de mélange et enfin des sources recherchées. L'efficacité de notre méthode a été prouvée dans la dernière partie du chapitre en utilisant des données simulées, et en comparaison avec plusieurs méthodes de la littérature.

Les résultats obtenus ont été très encourageants puisque nous avons obtenu les meilleures performances.

Pour chacune des contributions proposées dans le cadre de cette thèse, il est envisageable d'entrevoir plusieurs perspectives, présentées ci-dessous.

En ce qui concerne le **Chapitre 4** :

- Il serait très intéressant de faire une comparaison de l'approche proposée en utilisant différentes méthodes d'ACI (abordées dans le Chapitre 2) afin de définir celles correspondant le mieux aux applications de télédétection.
- L'algorithme NMF utilisé dans notre approche est connu pour avoir une convergence lente, surtout quand il s'agit d'une image de grande taille (comme c'est le cas en télédétection). Afin d'éviter ce problème, nous pouvons remplacer ce dernier par un autre algorithme basé sur le gradient projeté avec adaptation des pas d'apprentissage à chaque itération. Cela pourrait réduire considérablement le coût de calcul.
- L'approche proposée dans ce chapitre a été testée dans un contexte idéaliste non-bruité. Malgré les bons résultats des tests effectués sur données réelles sans vérité terrain, il serait souhaitable de compléter cette étude et de l'étendre à un mélange LI bruité, permettant ainsi l'évaluation de notre méthode de manière exhaustive.
- Enfin, comme la plus grande partie des tests effectués a été réalisée sur données simulées, nous envisageons de compléter cette étude en effectuant des tests supplémentaires sur données réelles pour lesquelles une vérité terrain serait disponible.

En ce qui concerne le **Chapitre 5** :

- Il serait intéressant d'étudier la mise en place de nouveaux critères de détection de zones bi-sources, et l'exploration de nouvelles méthodes de classification des paramètres de droites engendrées par les zones bi-sources détectées.
- Cette étude peut être complétée par la réalisation de tests supplémentaires sur données réelles pour lesquelles une vérité terrain serait disponible.
- Une extension intéressante de cette méthode consisterait en l'automatisation du choix des seuils utilisés pour la détection des zones bi-sources.
- Nous envisageons de développer de nouvelles méthodes fondées sur la parcimonie et utilisant les zones mono- et bi-sources en même temps. Par ailleurs, nous gagnerions à développer d'autres méthodes fondées sur la présence de zones contenant trois sources actives.

Pour finir, et en ce qui concerne la modélisation de l'ensemble des informations caractérisant une image et un pixel de télédétection, il serait intéressant et important pour la communauté scientifique de développer une base de données fondée sur les éléments d'informations proposés dans l'annexe E.

# Annexe A

## Informations supplémentaires concernant les tests 2 et 3

Ci-dessous nous présentons les détails relatifs aux données utilisées au niveau des tests 2 et 3 du Chapitre 4.

Dans une première expérimentation du Test 2, nous avons testé notre méthode sur des données artificielles issues d'un mélange linéaire de cartes d'abondance artificielles. Ces cartes d'abondance sont obtenues grâce à une distribution de Dirichlet, dont les paramètres (choisis expérimentalement), notés  $\theta_m$ , sont présentés ci-dessous. Nous détaillons également au niveau de la matrice  $CC$ , les coefficients de corrélation entre chacune des sources, relatives à chacune des images artificielles utilisées et obtenues en faisant varier le nombre de sources entre 3 et 9. Nous avons utilisé pour cette expérimentation, des images contenant  $M - 1$  sources peu corrélées entre elles, ainsi qu'une  $M^{\text{ème}}$  source présentant une corrélation assez élevée avec les  $M - 1$  premières.

**Cas à 3 sources :**

$$\theta = [1 \ 20 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.6944 & -0.0460 \\ -0.6944 & 1.0000 & -0.6869 \\ -0.0460 & -0.6869 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 4 sources :**

$$\theta = [1 \ 20 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.5207 & -0.0866 & -0.0378 \\ -0.5207 & 1.0000 & -0.5381 & -0.5625 \\ -0.0866 & -0.5381 & 1.0000 & -0.0607 \\ -0.0378 & -0.5625 & -0.0607 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 5 sources :**

$$\theta = [1 \ 20 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.4597 & -0.0644 & -0.0297 & -0.0551 \\ -0.4597 & 1.0000 & -0.4594 & -0.4889 & -0.4435 \\ -0.0644 & -0.4594 & 1.0000 & -0.0379 & -0.0512 \\ -0.0297 & -0.4889 & -0.0379 & 1.0000 & -0.0473 \\ -0.0551 & -0.4435 & -0.0512 & -0.0473 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 6 sources :**

$$\theta = [1 \ 20 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.3915 & -0.0437 & -0.0461 & -0.0491 & -0.0526 \\ -0.3915 & 1.0000 & -0.3877 & -0.4095 & -0.4024 & -0.4018 \\ -0.0437 & -0.3877 & 1.0000 & -0.0247 & -0.0592 & -0.0707 \\ -0.0461 & -0.4095 & -0.0247 & 1.0000 & -0.0541 & -0.0498 \\ -0.0491 & -0.4024 & -0.0592 & -0.0541 & 1.0000 & -0.0625 \\ -0.0526 & -0.4018 & -0.0707 & -0.0498 & -0.0625 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 7 sources :**

$$\theta = [1 \ 20 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.3486 & -0.0599 & -0.0422 & -0.0577 & -0.0362 & -0.0671 \\ -0.3486 & 1.0000 & -0.3300 & -0.3641 & -0.3506 & -0.3605 & -0.3455 \\ -0.0599 & -0.3300 & 1.0000 & -0.0527 & -0.0588 & -0.0678 & -0.0542 \\ -0.0422 & -0.3641 & -0.0527 & 1.0000 & -0.0630 & -0.0586 & -0.0551 \\ -0.0577 & -0.3506 & -0.0588 & -0.0630 & 1.0000 & -0.0387 & -0.0325 \\ -0.0362 & -0.3605 & -0.0678 & -0.0586 & -0.0387 & 1.0000 & -0.0511 \\ -0.0671 & -0.3455 & -0.0542 & -0.0551 & -0.0325 & -0.0511 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 8 sources :**

$$\theta = [1 \ 20 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.3371 & -0.0443 & -0.0300 & -0.0200 & -0.0728 & -0.0270 & -0.0377 \\ -0.3371 & 1.0000 & -0.3237 & -0.3113 & -0.3319 & -0.2909 & -0.3599 & -0.3248 \\ -0.0443 & -0.3237 & 1.0000 & -0.0706 & -0.0410 & -0.0620 & -0.0169 & -0.0508 \\ -0.0300 & -0.3113 & -0.0706 & 1.0000 & -0.0367 & -0.0603 & -0.0354 & -0.0336 \\ -0.0200 & -0.3319 & -0.0410 & -0.0367 & 1.0000 & -0.0559 & -0.0214 & -0.0581 \\ -0.0728 & -0.2909 & -0.0620 & -0.0603 & -0.0559 & 1.0000 & -0.0454 & -0.0404 \\ -0.0270 & -0.3599 & -0.0169 & -0.0354 & -0.0214 & -0.0454 & 1.0000 & -0.0413 \\ -0.0377 & -0.3248 & -0.0508 & -0.0336 & -0.0581 & -0.0404 & -0.0413 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 9 sources :**

---


$$\theta=[1 \ 20 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.2832 & -0.0511 & -0.0538 & -0.0420 & -0.0586 & -0.0464 & -0.0347 & -0.0468 \\ -0.2832 & 1.0000 & -0.2994 & -0.2800 & -0.3135 & -0.2705 & -0.2763 & -0.3205 & -0.2821 \\ -0.0511 & -0.2994 & 1.0000 & -0.0562 & -0.0376 & -0.0588 & -0.0535 & -0.0181 & -0.0455 \\ -0.0538 & -0.2800 & -0.0562 & 1.0000 & -0.0268 & -0.0511 & -0.0621 & -0.0591 & -0.0462 \\ -0.0420 & -0.3135 & -0.0376 & -0.0268 & 1.0000 & -0.0453 & -0.0449 & -0.0387 & -0.0361 \\ -0.0586 & -0.2705 & -0.0588 & -0.0511 & -0.0453 & 1.0000 & -0.0640 & -0.0289 & -0.0637 \\ -0.0464 & -0.2763 & -0.0535 & -0.0621 & -0.0449 & -0.0640 & 1.0000 & -0.0368 & -0.0578 \\ -0.0347 & -0.3205 & -0.0181 & -0.0591 & -0.0387 & -0.0289 & -0.0368 & 1.0000 & -0.0309 \\ -0.0468 & -0.2821 & -0.0455 & -0.0462 & -0.0361 & -0.0637 & -0.0578 & -0.0309 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Dans la deuxième expérimentation du Test 2, nous avons testé notre méthode sur une image contenant  $M - 2$  sources peu corrélées entre elles. Pour la création de ces sources, nous avons utilisé une distribution de Dirichlet, dont les paramètres (choisis expérimentalement), notés  $\theta_m$ , sont présentés ci-dessous. Nous détaillons également au niveau de la matrice CC, les coefficients de corrélation entre chacune des sources, relatives à chacune des images artificielles utilisées et obtenues en faisant varier le nombre de sources entre 3 et 9 :

**Cas à 3 sources :**

$$\theta=[3, 30, 9]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.4699 & -0.1101 \\ -0.4699 & 1.0000 & -0.8257 \\ -0.1101 & -0.8257 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 4 sources :**

$$\theta=[3 \ 30 \ 9 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.3842 & -0.1928 & -0.0734 \\ -0.3842 & 1.0000 & -0.7394 & -0.2859 \\ -0.1928 & -0.7394 & 1.0000 & -0.0909 \\ -0.0734 & -0.2859 & -0.0909 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 5 sources :**

$$\theta=[3 \ 30 \ 9 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.4060 & -0.1172 & -0.0749 & -0.0648 \\ -0.4060 & 1.0000 & -0.6863 & -0.2569 & -0.2687 \\ -0.1172 & -0.6863 & 1.0000 & -0.0937 & -0.0964 \\ -0.0749 & -0.2569 & -0.0937 & 1.0000 & -0.0319 \\ -0.0648 & -0.2687 & -0.0964 & -0.0319 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 6 sources :**

$$\theta=[3 \ 30 \ 9 \ 1 \ 1 \ 1]$$



$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.3923 & -0.1393 & -0.0459 & -0.0475 & -0.0644 \\ -0.3923 & 1.0000 & -0.6157 & -0.2361 & -0.2737 & -0.2273 \\ -0.1393 & -0.6157 & 1.0000 & -0.1084 & -0.0701 & -0.1038 \\ -0.0459 & -0.2361 & -0.1084 & 1.0000 & -0.0414 & -0.0615 \\ -0.0475 & -0.2737 & -0.0701 & -0.0414 & 1.0000 & -0.0300 \\ -0.0644 & -0.2273 & -0.1038 & -0.0615 & -0.0300 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 7 sources :**

$$\theta = [3 \ 30 \ 9 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.3607 & -0.1305 & -0.0304 & -0.0653 & -0.0532 & -0.0397 \\ -0.3607 & 1.0000 & -0.5480 & -0.2276 & -0.2628 & -0.2452 & -0.2460 \\ -0.1305 & -0.5480 & 1.0000 & -0.1332 & -0.0800 & -0.1138 & -0.1105 \\ -0.0304 & -0.2276 & -0.1332 & 1.0000 & -0.0080 & -0.0412 & -0.0314 \\ -0.0653 & -0.2628 & -0.0800 & -0.0080 & 1.0000 & -0.0129 & -0.0372 \\ -0.0532 & -0.2452 & -0.1138 & -0.0412 & -0.0129 & 1.0000 & -0.0089 \\ -0.0397 & -0.2460 & -0.1105 & -0.0314 & -0.0372 & -0.0089 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 8 sources :**

$$\theta = [3 \ 30 \ 9 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.3381 & -0.1310 & -0.0443 & -0.0290 & -0.0701 & -0.0496 & -0.0442 \\ -0.3381 & 1.0000 & -0.5184 & -0.2190 & -0.2428 & -0.2163 & -0.2452 & -0.2236 \\ -0.1310 & -0.5184 & 1.0000 & -0.1067 & -0.0913 & -0.0991 & -0.0854 & -0.1059 \\ -0.0443 & -0.2190 & -0.1067 & 1.0000 & -0.0316 & -0.0170 & -0.0418 & -0.0286 \\ -0.0290 & -0.2428 & -0.0913 & -0.0316 & 1.0000 & -0.0431 & -0.0051 & -0.0326 \\ -0.0701 & -0.2163 & -0.0991 & -0.0170 & -0.0431 & 1.0000 & -0.0258 & -0.0248 \\ -0.0496 & -0.2452 & -0.0854 & -0.0418 & -0.0051 & -0.0258 & 1.0000 & -0.0219 \\ -0.0442 & -0.2236 & -0.1059 & -0.0286 & -0.0326 & -0.0248 & -0.0219 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

**Cas à 9 sources :**

$$\theta = [3 \ 30 \ 9 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.3098 & -0.1435 & -0.0387 & -0.0342 & -0.0462 & -0.0549 & -0.0418 & -0.0682 \\ -0.3098 & 1.0000 & -0.4869 & -0.2163 & -0.2023 & -0.2281 & -0.2228 & -0.2205 & -0.1979 \\ -0.1435 & -0.4869 & 1.0000 & -0.0893 & -0.1036 & -0.0841 & -0.0841 & -0.0858 & -0.0881 \\ -0.0387 & -0.2163 & -0.0893 & 1.0000 & -0.0547 & -0.0220 & -0.0167 & -0.0214 & -0.0334 \\ -0.0342 & -0.2023 & -0.1036 & -0.0547 & 1.0000 & -0.0299 & -0.0392 & -0.0438 & -0.0250 \\ -0.0462 & -0.2281 & -0.0841 & -0.0220 & -0.0299 & 1.0000 & -0.0124 & -0.0270 & -0.0394 \\ -0.0549 & -0.2228 & -0.0841 & -0.0167 & -0.0392 & -0.0124 & 1.0000 & -0.0315 & -0.0493 \\ -0.0418 & -0.2205 & -0.0858 & -0.0214 & -0.0438 & -0.0270 & -0.0315 & 1.0000 & -0.0299 \\ -0.0682 & -0.1979 & -0.0881 & -0.0334 & -0.0250 & -0.0394 & -0.0493 & -0.0299 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Enfin, pour ce qui est du Test 3, nous détaillons ci-dessous, au niveau de la matrice CC, les coefficients de corrélation entre chacune des sources considérées. Pour rappel, les sources utilisées dans cette expérimentation ont été créées à partir d'une classification réelle de cartes d'occupation du

---

sol.

$$CC = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.2707 & -0.0909 & -0.1904 & -0.0547 & -0.1897 & -0.0755 & -0.2204 \\ -0.2707 & 1.0000 & -0.1105 & -0.2365 & -0.1218 & -0.2876 & -0.1029 & -0.3328 \\ -0.0909 & -0.1105 & 1.0000 & -0.0791 & -0.0168 & -0.0935 & -0.0062 & -0.0931 \\ -0.1904 & -0.2365 & -0.0791 & 1.0000 & -0.0809 & -0.1976 & -0.0672 & -0.2420 \\ -0.0547 & -0.1218 & -0.0168 & -0.0809 & 1.0000 & -0.0529 & -0.0048 & -0.0903 \\ -0.1897 & -0.2876 & -0.0935 & -0.1976 & -0.0529 & 1.0000 & -0.0356 & -0.0265 \\ -0.0755 & -0.1029 & -0.0062 & -0.0672 & -0.0048 & -0.0356 & 1.0000 & -0.0774 \\ -0.2204 & -0.3328 & -0.0931 & -0.2420 & -0.0903 & -0.0265 & -0.0774 & 1.0000 \end{bmatrix}$$



## **Annexe B**

# **Informations supplémentaires concernant le Test 4**

Nous présentons dans cette annexe, les cartes de fractions d'abondance estimées par l'approche proposée, en utilisant la méthode N-ICA.

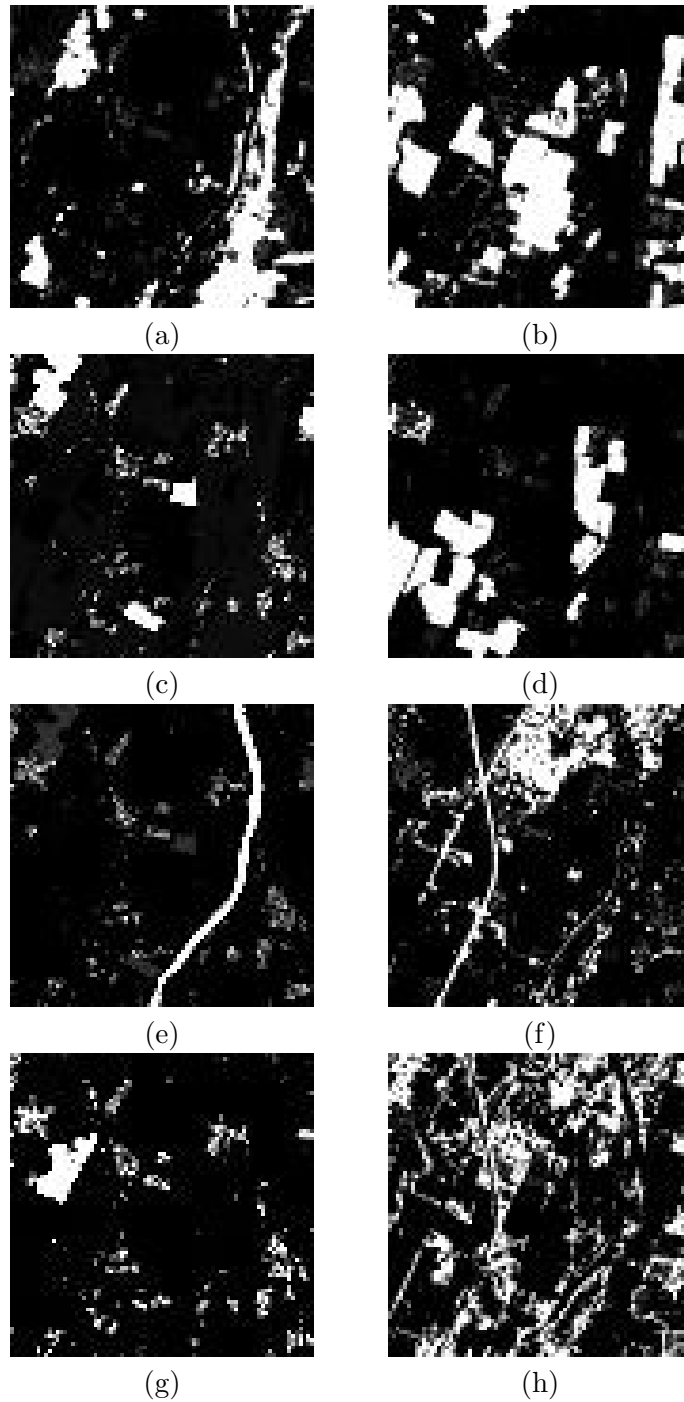


FIGURE B.1 – Cartes estimées avec modifICA-NMF pour le Test 4 (incluant N-ICA).

## Annexe C

# Démonstration de la validité du critère bi-source de la méthode BiS-Corr

Dans cette partie du manuscrit, on va finir de prouver la validité du critère de détection de zones bi-sources utilisé dans la première étape de BiS-Corr. En effet, pour une observation donnée (la  $\ell^{\text{ème}}$  bande spectrale, par exemple), et un échantillon donné (c.à.d. pour un pixel donné  $n$ ), nous avons vu précédemment que le modèle de mélange s'écrit (quel que soit le nombre de sources actives) comme suit :

$$x_\ell(n) = \sum_{m=1}^M r_{\ell m} f_m(n) \quad \forall n \in \{1 \dots N\}, \text{ et } \ell \in \{1 \dots L\}. \quad (\text{C.1})$$

En utilisant la contrainte de somme à un (5.7), on peut faire disparaître une des sources (parmi les  $M$  considérées dans le mélange). L'indice de cette dernière est noté " $m_0$ ", et on rappelle par la même occasion que  $\mathcal{M}_0$  est l'ensemble des indices de toutes les autres sources. Comme démontré en Section 5.3, pour chaque zone d'analyse, on obtient à partir de (C.1) :

$$\bar{\mathbf{x}}_\ell(\Omega) = \sum_{m \in \mathcal{M}_0} (r_{\ell m} - r_{\ell m_0}) \bar{\mathbf{f}}_m(\Omega), \quad (\text{C.2})$$

où le vecteur colonne  $\bar{\mathbf{x}}_\ell(\Omega)$  contient toutes les valeurs des pixels centrés  $\bar{x}_\ell(n)$  dans la zone d'analyse considérée. De la même manière, en ce qui concerne la bande spectrale  $p$ , on obtient :

$$\bar{\mathbf{x}}_p(\Omega) = \sum_{m \in \mathcal{M}_0} (r_{pm} - r_{pm_0}) \bar{\mathbf{f}}_m(\Omega). \quad (\text{C.3})$$

On s'intéresse dans cette annexe C, au cas où plus de deux sources sont actives au niveau de la zone d'analyse  $\Omega$  considérée. Conformément à ce qui a été présenté plus haut,  $\mathcal{M}_0$  contient donc au moins deux sources actives. Plus précisément, on s'intéresse aux vecteurs de sources  $\bar{\mathbf{f}}_m(\Omega)$  différents de zéro (avec  $m \in \mathcal{M}_0$ ).

Supposons que le critère utilisé pour la détection de cette zone d'analyse est vérifié, c.à.d :

$$|\rho_{x_\ell x_p}(\Omega)| = 1, \quad \forall \ell, p = \{1 \dots L\} \text{ et } \ell > p. \quad (\text{C.4})$$

Dans ce cas, pour chacune des bandes  $\ell$  et  $p$ , les vecteurs  $\bar{\mathbf{x}}_\ell(\Omega)$  et  $\bar{\mathbf{x}}_p(\Omega)$  sont linéairement dépendants (voir (5.22)). Ainsi, en supposant que ces derniers vecteurs sont non nuls :

$$\exists \alpha_{\ell p}, \bar{\mathbf{x}}_\ell(\Omega) = \alpha_{\ell p} \bar{\mathbf{x}}_p(\Omega). \quad (\text{C.5})$$

En combinant (C.5) avec (C.2) et (C.3), on obtient :

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_0} (\Delta r_{\ell m} - \alpha_{\ell p} \Delta r_{pm}) \bar{\mathbf{f}}_m(\Omega) = 0, \quad (\text{C.6})$$

avec  $\Delta r_{\ell m} = r_{\ell m} - r_{\ell m_0} \forall m \in \mathcal{M}_0$  (de même pour la bande  $p$ ,  $\Delta r_{pm} = r_{pm} - r_{pm_0}$ ). L'hypothèse 6 implique alors que tous les coefficients de (C.6) sont nuls, c.à.d. :

$$\Delta r_{\ell m} = \alpha_{\ell p} \Delta r_{pm}, \quad \forall \ell, p = \{1 \dots L\}, \ell > p, \text{ et } m \in \mathcal{M}_0. \quad (\text{C.7})$$

Ainsi, toutes les colonnes  $m$ , avec  $m \in \mathcal{M}_0$ , de la matrice d'écart de réflectances, avec des indices correspondant aux indices des vecteurs centrés  $\bar{\mathbf{f}}_m(\Omega)$  non-nuls seraient colinéaires. Ce qui implique **une contradiction** dans notre démonstration en raison de l'hypothèse 7. Ainsi, la condition de détection (C.4) ne peut pas être vérifiée pour cette configuration.

## Annexe D

# Variante de la méthode BiS-Corr

Nous présentons dans cette annexe une nouvelle variante de la méthode BiS-Corr appelée BiS-Corr-2. Plus précisément, il s'agit de présenter une nouvelle manière de classifier les paramètres des droites engendrées par les zones bi-sources présentes dans l'image. Pour cela, nous commençons par un bref rappel des objectifs souhaités ainsi que le modèle de mélange utilisé. Puis nous abordons la partie liée aux modifications apportées. Enfin nous présentons quelques résultats de tests effectués en comparaison avec la version initiale présentée dans le Chapitre 5 de ce manuscrit.

### D.1 Rappels

Tout comme la méthode BiS-Corr, détaillée au niveau de la Section 5.3 du Chapitre 5, l'objectif à atteindre est l'estimation de la matrice de mélange et les sources présentes dans l'image étudiée. Pour rappel, le mélange considéré est de type linéaire, c.à.d. après vectorisation des dimensions spatiales, on peut exprimer la réflectance non-négative observée dans la  $\ell^{\text{ème}}$  bande spectrale, pour un pixel donné  $n$ , comme suit :

$$x_\ell(n) = \sum_{m=1}^M r_{\ell m} f_m(n) \quad \forall n \in \{1 \cdots N\}, \ell \in \{1 \cdots L\}. \quad (\text{D.1})$$

De même, on rappelle les contraintes de non-négativité et d'additivité suivantes :

$$f_m(n) \geq 0, \quad \forall \begin{matrix} m \in \{1 \cdots M\} \\ n \in \{1 \cdots N\}, \end{matrix} \quad (\text{D.2})$$

$$\sum_{m=1}^M f_m(n) = 1, \quad \forall n \in \{1 \cdots N\}. \quad (\text{D.3})$$

Précédemment, nous avons détaillé dans la première étape de la méthode initiale (Section 5.3 du Chapitre 5) comment déterminer, à partir d'une image, les zones d'analyse où seulement deux matériaux purs sont actifs et ce, à l'aide d'un critère basé sur la corrélation. Ces zones représentent les zones bi-sources recherchées.

Puis dans une deuxième étape nous avons détaillé le moyen d'identification des colonnes de la matrice de mélange. Pour rappel, cette étape est composée des trois parties suivantes : **(1)** estimation des paramètres des droites dans un espace à  $L$  dimensions (relatives à chaque zone bi-source), **(2)** classification de ces paramètres estimés, et enfin, **(3)** calcul de la distance minimale



entre ces droites.

Enfin, l'extraction des sources recherchées est effectuée à l'aide d'une méthode des moindres carrés avec contrainte de non-négativité.

## D.2 Description de la nouvelle variante BiS-Corr-2

Nous nous proposons de détailler dans cette section une variante de la méthode de SAS décrite dans le Chapitre 5 de ce manuscrit. Pour cette nouvelle version nous utilisons les mêmes hypothèses que dans la méthode initiale, le même paramètre de détection de zone bi-source, ainsi que la même méthode d'extraction des sources. La structure générale de cette variante est également similaire à celle de BiS-Corr, à savoir :

- Détection de toutes les zones d'analyse bi-sources, disponibles au niveau de l'image considérée (observation).
- Identification de la matrice de mélange.
- Extraction des sources recherchées (les fractions d'abondance).

La nouvelle variante que nous introduisons ici est différente par rapport à la version initiale au niveau des deux premières étapes. En effet, au niveau de la première étape de cette nouvelle version, nous utilisons l'étape I et les deux premières parties de l'étape II de la méthode initiale. En d'autres termes, l'estimation des paramètres d'une droite, avec la procédure détaillée dans le Chapitre 5, est réalisée dans l'étape de détection de zones bi-sources. Ainsi nous obtenons un couple de vecteurs, à  $L$  dimensions,  $\mathbf{u}^*$  (le vecteur directeur) et  $\mathbf{d}^*$  (un point de la droite) pour chaque zone bi-source détectée. Nous visons donc, en sortie de cette étape, l'estimation d'un seul couple  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$  pour chaque paire de sources. Pour ce faire, et après ré-organisation de chaque couple estimé  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$  dans un vecteur global, nous classons ces derniers vecteurs en utilisant successivement chacun d'eux comme suit :

Après avoir affecté le premier vecteur à une première classe notée "classe-1", nous calculons l'angle spectral<sup>21</sup> entre le vecteur attribué à cette classe et celui correspondant à la prochaine zone bi-source détectée. Si l'angle spectral est inférieur à un seuil (fixé expérimentalement), nous comparons la valeur du critère de détection pour chacune des zones considérées et attribuons le vecteur, correspondant à la meilleure zone bi-source, à cette première classe. Dans le cas contraire, une nouvelle classe est créée ("classe-2") et nous y attribuons le deuxième vecteur. Ensuite, nous comparons le vecteur correspondant à la prochaine zone bi-source avec les vecteurs attribués à chacune des classes existantes. Chaque vecteur testé est affecté à la classe la plus proche en terme d'angle spectral et également en tenant compte de la valeur du critère de détection de la zone bi-source considérée. Pour être plus précis, et contrairement à l'approche initiale, le nouveau vecteur retenu (avec une meilleure valeur du critère de détection) écrase le vecteur précédent pour la même classe. Dans le cas contraire, en l'occurrence lorsque l'angle spectral est supérieur au seuil fixé, le vecteur en question définit une nouvelle classe, et ainsi de suite, pour toutes les autres classes.

Cette nouvelle configuration nous permet d'avoir en sortie de la première étape de la méthode un seul couple  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$  pour chaque paire de sources. En d'autres termes, nous obtenons en plus de la détection des zones bi-sources, une classification efficace de ces zones, en tenant compte

---

21. L'angle spectral est défini dans (4.28). Dans ce cas de figure, nous utilisons cette mesure afin de comparer les vecteurs des paramètres des droites.

des paramètres des droites correspondantes, permettant ainsi l'identification d'une seule droite associée à chaque paire de sources.

Nous sommes maintenant en mesure de représenter chaque droite contenant les points liés à chaque classe, et ainsi d'estimer la distance minimale entre les différents couples de droites. Cette opération considérée comme étant la deuxième étape de cette nouvelle version de la méthode, correspond à la dernière partie de la deuxième étape de la méthode initiale. Pour plus de détails concernant cette opération (estimation de la distance minimale), ou bien celle relative à l'extraction des sources, il est possible de consulter la Section 5.3 du Chapitre 5.

Pour une idée plus générale de cette nouvelle version de la méthode (BiS-Corr-2), un schéma résumant les trois étapes est donné dans la figure D.1.

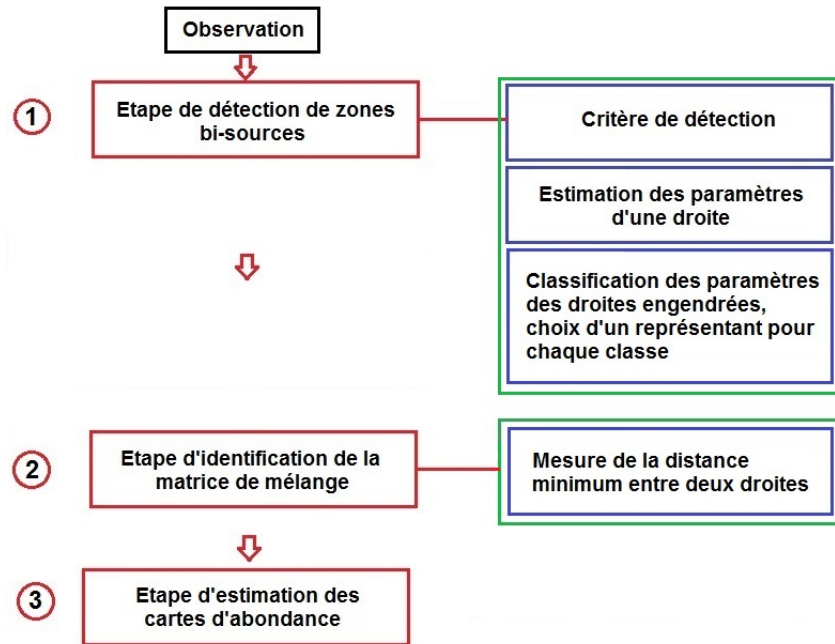


FIGURE D.1 – Résumé des différentes étapes de la méthode BiS-Corr-2.

Par ailleurs, et afin de permettre au lecteur de bien distinguer les modifications apportées dans la méthode initiale, nous proposons également d'illustrer le schéma récapitulatif de celle-ci dans la figure D.2.

## D.3 Résultats expérimentaux

Pour évaluer les performances de la méthode BiS-Corr-2, nous présentons dans cette section différents tests réalisés avec l'image hyperspectrale (simulée), utilisée dans le Test 3 du Chapitre 5 (voir figure 5.16).

Pour rappel, et afin de procéder à l'évaluation quantitative des résultats des tests effectués, nous avons utilisé, après correction des permutations, deux critères de performances différents : le NMSE (erreur quadratique moyenne normalisée) pour les fractions d'abondance, et le SAM (angle spectral) pour les spectres de réflectance. Par ailleurs, nous rappelons que pour la plupart des cas, la comparaison des méthodes est réalisée sur la base des valeurs moyennes de SAM et

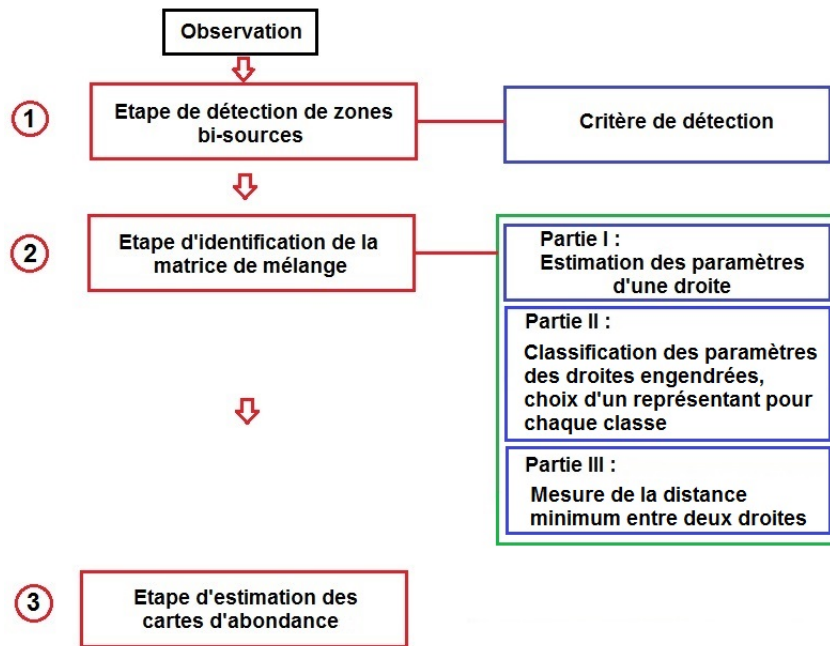


FIGURE D.2 – Résumé des différentes étapes de la méthode initiale (BiS-Corr).

NMSE obtenues sur tous les endmembers.

Nous détaillons dans un premier temps les résultats obtenus avec cette version de la méthode par rapport à ceux fournis par la méthode initiale (BiS-Corr). Nous présentons par la suite les résultats obtenus avec les deux versions de la méthode en faisant varier la taille de la zone d'analyse, puis nous réalisons le même type de test en faisant varier le pas de déplacement de la zone d'analyse. Enfin nous comparons les résultats obtenus avec BiS-Corr-2 à ceux obtenus avec 2D-Corr-NLS, qui est détaillée dans la Section 3.4 du Chapitre 3.

L'application de la méthode BiS-Corr-2 sur l'image considérée a engendré de très bons résultats, comme nous l'avons mis en avant dans les tableaux D.1 et D.2. Dans ces derniers, nous présentons les résultats numériques obtenus en utilisant : (a) BiS-Corr et (b) BiS-Corr-2. Dans cette expérimentation, nous nous sommes limités à ne comparer les résultats obtenus qu'avec BiS-Corr, en raison des bons résultats obtenus par cette dernière par rapport aux méthodes de la littérature utilisées dans le Test 3 du Chapitre 5.

TABEAU D.1 – Comparaison des SAM obtenus, en utilisant : (a) BiS-Corr, (b) BiS-Corr-2.

|          | matériau<br>(1) | matériau<br>(2) | matériau<br>(3) | matériau<br>(4) | matériau<br>(5) | matériau<br>(6) | matériau<br>(7) | matériau<br>(8) | valeur<br>moyenne |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| <b>a</b> | 0,04            | 0,02            | 0,08            | 0,01            | 0,01            | 0,29            | 0,21            | 0,02            | 0,07              |
| <b>b</b> | 0,03            | 0,01            | 0,09            | 0,02            | 0,01            | 0,09            | 0,21            | 0,03            | 0,06              |

Les performances obtenues avec la nouvelle version sont légèrement meilleures (en particulier

TABLEAU D.2 – Comparaison des NMSE obtenus, en utilisant : (a) BiS-Corr, (b) BiS-Corr-2.

|          | matériau<br>(1) | matériau<br>(2) | matériau<br>(3) | matériau<br>(4) | matériau<br>(5) | matériau<br>(6) | matériau<br>(7) | matériau<br>(8) | valeur<br>moyenne |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| <b>a</b> | 0,002           | 0,003           | 0,020           | 0,004           | 0,003           | 0,007           | 0,008           | 0,003           | 0,006             |
| <b>b</b> | 0,003           | 0,004           | 0,015           | 0,003           | 0,003           | 0,010           | 0,012           | 0,001           | 0,006             |

pour les spectres) que celles fournies par la méthode initiale. Cette amélioration est principalement due à la modification du processus de classification, qui est basé sur le choix de la meilleure zone bi-source pour chacune des classes retenues, ce qui n'est pas le cas de la méthode initiale. La modification apportée a non seulement permis cette petite amélioration des performances, mais aussi celle du temps de calcul qui passe de 6 secondes initialement à 3 secondes dans la nouvelle configuration. Ce premier test nous permet de conclure sur l'efficacité de BiS-Corr-2, en particulier pour ce qui concerne la classification des paramètres de droites engendrées par les meilleures zones bi-sources détectées. Par ailleurs, il est à signaler que les tests effectués ont été obtenus avec des zones d'analyses  $\Omega$  de  $3 \times 5$  pixels. Pour ce qui est du critère de corrélation utilisé au niveau de l'étape d'identification, il est également à signaler que le seuil choisi dans cette étape a été fixé à 0,9665. Enfin, l'image étudiée a été explorée à l'aide de zones d'analyse recouvrantes par pas de un pixel.

Comme introduit plus haut, nous avons par ailleurs testé les deux versions de la méthode avec différentes tailles de zones d'analyse, à savoir :  $2 \times 2$ ,  $3 \times 5$  et  $5 \times 5$  pixels. Les résultats obtenus dans cette expérimentation sont détaillés dans le tableau D.3, dans lequel nous donnons quelques informations relatives au nombre de zones bi-sources détectées, le nombre de droites retenues, et enfin le nombre de sources estimées, sachant que le nombre de sources contenues dans l'image utilisée est de 8. L'objectif principal de ce test est d'observer le comportement de nos méthodes en utilisant différentes tailles de zones d'analyse dans l'étape de détection.

TABLEAU D.3 – Analyse du comportement de nos méthodes en fonction de la taille des zones d'analyse : (a) BiS-Corr, (b) BiS-Corr-2.

|          | taille<br>$\Omega$ | seuil<br>critère détection | nombre<br>zones bi-sources | nombre<br>droites | nombre<br>sources |
|----------|--------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------|-------------------|
| <b>a</b> | $2 \times 2$       | 0,994                      | 315                        | 17                | 5                 |
| <b>b</b> | idem               | idem                       | idem                       | 16                | 7                 |
| <b>a</b> | $3 \times 5$       | 0,9665                     | 444                        | 13                | 8                 |
| <b>b</b> | idem               | idem                       | idem                       | idem              | idem              |
| <b>a</b> | $5 \times 5$       | 0,9                        | 369                        | 11                | 6                 |
| <b>b</b> | idem               | idem                       | idem                       | idem              | 7                 |

Au vu des informations présentées dans le tableau D.3, nous remarquons que la taille de la zone d'analyse impacte grandement la détection des zones bi-sources, et donc le nombre de sources estimées. Nous remarquons dans le tableau D.3 que les meilleurs résultats (c.à.d. les

estimations des 8 sources recherchées), sont obtenus en utilisant une zone d'analyse de  $3 \times 5$  pixels, ce qui correspond à une zone contenant 15 pixels adjacents. En effet, si la taille retenue est trop petite, nous ne pouvons pas garantir la fiabilité du critère de corrélation utilisé pour la détection des zones d'intérêt. Par ailleurs, si la taille de la zone est relativement grande, on risque de diminuer la probabilité de détecter les zones d'analyse où seulement deux matériaux purs sont présents (de 444 zones détectées dans le cas  $3 \times 5$  pixels à 369 zones dans le cas  $5 \times 5$  pixels). Ceci explique la diminution du nombre de sources estimées. Ces remarques sont valables pour les deux versions de la méthode.

Dans une autre expérience, nous analysons le comportement de nos méthodes pour une valeur plus élevée que précédemment du pas de déplacement de la zone d'analyse. En d'autres termes, l'image étudiée a été ici explorée à l'aide de zones d'analyse *adjacentes* de  $3 \times 5$  pixels. Pour rappel, nous avons utilisé dans les précédents tests des zones d'analyse recouvrantes, en déplaçant la zone considérée par pas de un pixel. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau D.4.

TABLEAU D.4 – Analyse du comportement de nos méthodes en utilisant des zones d'analyse adjacentes : (a) BiS-Corr, (b) BiS-Corr-2.

|          | taille<br>$\Omega$ | déplacement<br>$\Omega$ | seuil<br>critère détection | nombre<br>zones bi-sources | nombre<br>droites | nombre<br>sources |
|----------|--------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------|-------------------|
| <b>a</b> | $3 \times 5$       | $3 \times 5$            | 0,8                        | 45                         | 13                | 3                 |
| <b>b</b> | idem               | idem                    | idem                       | 44                         | 19                | 4                 |

Au vu des résultats présentés dans le tableau D.4, nous remarquons que les deux versions de la méthode n'arrivent pas à déterminer l'ensemble des sources présentes dans l'image étudiée (c.à.d. les 8 sources recherchées). Ce constat n'est pas une surprise, car le déplacement de la zone d'analyse par un pas correspondant à la taille de cette zone, entraîne la réduction des chances de détection de zones bi-sources, nécessaires pour la suite de la méthode (estimation des paramètres de droite, ...). Pour conclure, il est recommandé de parcourir les données étudiées à l'aide de zones d'analyse recouvrantes, avec une préférence pour les pas de déplacement de 1 pixel sur les colonnes (et les lignes) ; c'était en l'occurrence le cas dans les premières expérimentations (voir tableaux D.1 et D.3) où l'on obtient de bien meilleurs résultats.

Le dernier test réalisé consiste à comparer les performances de BiS-Corr-2 avec celles de la méthode 2D-corr-NLS, qui est une méthode basée sur l'existence de zones mono-sources dans une image de télédétection. Après avoir testé cette méthode sur l'image considérée, nous n'avons pu extraire que quatre sources parmi les huit présentes dans l'image, alors que notre approche estime avec de très bonnes performances les huit sources recherchées (voir tableau D.2). A cet effet, nous n'avons pas jugé utile de donner le détail relatif aux performances obtenues. Ce dernier test prouve que l'hypothèse d'existence de zones bi-sources permet une meilleure extraction et est fondée sur une hypothèse plus réaliste que celle retenue dans la méthode 2D-corr-NLS.

## Annexe E

# Etude relative à la conception d'une base de données

En plus des objectifs tracés dès le départ de cette thèse, à savoir le développement de méthodes de SAS, il était également prévu de consacrer une partie de cette thèse aux moyens d'accéder à tout un ensemble de "blocs de données", censés constituer une base de données de grande taille. En effet, afin de valider les méthodologies proposées, il est toujours nécessaire de pouvoir effectuer des tests sur les données traitées. Au vu de la non disponibilité permanente de celles-ci, il ne nous a pas été possible d'atteindre cet objectif.

Cependant, afin de pallier ce manquement, nous nous sommes limités principalement à identifier les éléments d'informations caractérisant les données de télédétection et ce, dans la perspective de générer une Base de Données Relationnelle (BDR)<sup>22</sup>. Les données concernées par cette étude peuvent être des images hyperspectrales d'une zone de la Terre, comme celles détaillées au niveau du premier chapitre de ce manuscrit, ou éventuellement des images hyperspectrales astrophysiques relatives à l'observation d'une zone du ciel à différentes longueurs d'onde. Un instrument susceptible de fournir des données astrophysiques est le spectro-imageur MUSE (Multi-Unit Spectroscopic Explorer) qui a été intégré au VLT (Very Large Telescope) au Chili vers la fin de l'année 2013, et dont les données sont actuellement en cours de validation, et donc également indisponibles pour nos besoins.

Etant donné que notre thèse porte sur des applications de télédétection, nous nous sommes limités à ce stade à mettre en place la structure générale liée aux entités et aux attributs pouvant être retenus pour la mise en œuvre d'une BDR de télédétection. Une telle base de données pourrait être utilisée par l'ensemble de la communauté scientifique évoluant dans le domaine, et permettrait ainsi de résoudre un grand problème lié au manque de données, avec bien sûr une vérité terrain afin de valider les résultats des méthodes développées, comme celles proposées dans le cadre de cette thèse.

Notre idée de mettre en place ce type de base de données est inspirée d'une autre base de données existante mais dédiée à l'astronomie, appelée Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Cette dernière est alimentée par les données reçues à partir du télescope de 2,5 mètres de diamètre, de l'Observatoire d'Apache Point situé dans les monts Sacramento, au Nouveau-Mexique (Etats-Unis). L'instrument utilisé a permis la réalisation, après plus d'une décennie d'observation, de

---

22. Une BDR permet l'organisation des données sous forme de relations. L'exploitation de cette dernière est réalisée à l'aide d'un langage déclaratif, comme par exemple SQL (Structured Query Language).

l'image la plus grande et la plus détaillée du ciel (couvrant 25 % du ciel) et a également permis l'enregistrement de plusieurs centaines de millions d'objets célestes. Au début de son exploitation, vers l'année 2000, SDSS a enregistré plus de données en quelques semaines que toutes les données collectées dans l'histoire de l'astronomie. A titre d'exemple, le télescope utilisé dans ce programme est capable d'enregistrer à tout instant, environ 590 spectres différents, où chaque spectre est lié à un objet dans le ciel pouvant être un quasar, une galaxie ou bien une étoile. Les données enregistrées sont accessibles via Internet à l'aide de plusieurs outils facilitant l'accès à la base de données, où l'on peut soumettre des requêtes SQL (Structured Query Language). Pour plus de détails concernant les différents outils disponibles dans cette base de données ainsi que les différentes versions de cette dernière (SDSS-I, II, III ou IV), il est possible de consulter le site web de la SDSS appelé "skyserver"<sup>23</sup> (par exemple consulter une des dernières mises à jour : "data release 10"). Dans le skyserver, il est également possible de consulter la partie relative aux différentes requêtes SQL (par défaut ou autre) proposées pour pouvoir accéder aux données recherchées, qu'il s'agisse de spectres, d'images ou autres.

En nous basant donc sur SDSS, et tout particulièrement sur les facilités proposées pour y accéder, nous détaillons dans la figure E.1, l'ensemble des informations (i.e. entités et liens) caractérisant les données devant être étudiées dans le domaine de l'observation de la Terre. Le schéma contenant ces informations repose à un premier niveau, sur des éléments d'informations caractérisant une image, et à un deuxième sur des informations caractérisant un pixel.

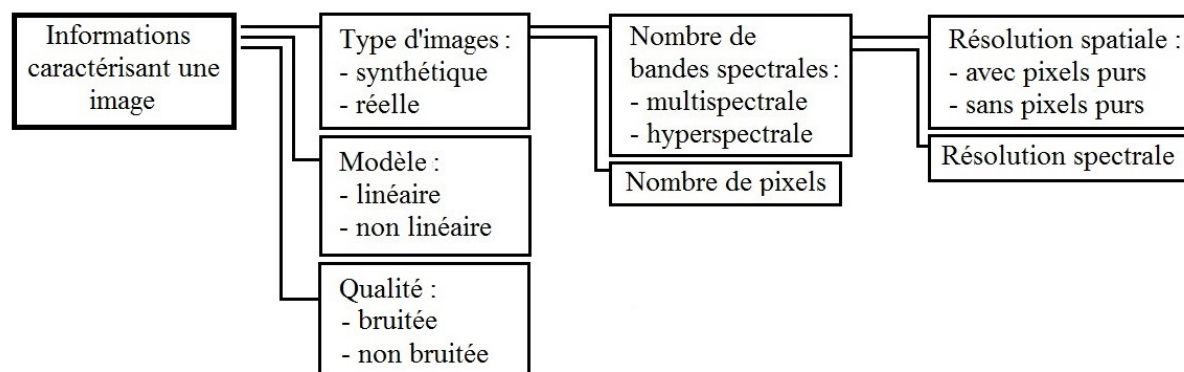
Les informations pouvant caractériser une image sont représentées au niveau de la partie (a) de la figure E.1. Dans cette partie, nous proposons de faire la distinction entre des images synthétiques obtenues à l'aide de bibliothèques spectrales (USGS ou autre), comme c'est le cas des données utilisées dans la Section 5.4 du chapitre en cours (voir également les tests effectués dans le Chapitre 4), ou bien des images réelles pour lesquelles une vérité terrain serait disponible, avec la possibilité de stocker des images issues de capteurs différents (AVIRIS, SPOT ...). Par ailleurs, il a été également possible de diviser les images retenues en nous basant sur le modèle de mélange pouvant être appliqué ; comme abordé dans le Chapitre 3, ce modèle peut être linéaire ou non-linéaire. Enfin, nous proposons d'inclure dans cette partie du schéma une entité relative à la qualité de l'image (i.e. envisager le choix entre différents niveaux de bruit). En fonction du besoin et des applications les plus utilisées, nous proposons par ailleurs, de relier l'entité relative au type de l'image recherchée aux entités relatives à la taille de l'image ainsi que celle liée au nombre de bandes spectrales. Cette dernière entité nous donne le choix, comme illustré dans la figure E.1, entre la mise à disposition d'images multispectrales ou hyperspectrales, et permet également d'ouvrir un lien à différents niveaux d'informations comme par exemple, la résolution spatiale, spectrale ou temporelle des images considérées et ce, dans l'objectif d'englober un large éventail d'applications.

Quant aux informations liées au pixel d'une image, qu'on représente dans la partie (b) de la figure E.1, il est possible de procéder à une classification en fonction du nombre de matériaux considérés dans les pixels. L'entité proposée pourrait, par exemple, être utile pour valider des méthodes de la même catégorie que celle proposée dans ce chapitre. Nous pouvons aussi, selon la thématique étudiée, procéder à une classification en fonction de la structure des pixels de l'image, celle-ci pouvant être simple ou complexe (zones agricoles, zones urbaines, ...). On peut enfin inclure, en fonction des applications les plus utilisées, différents niveaux d'informations

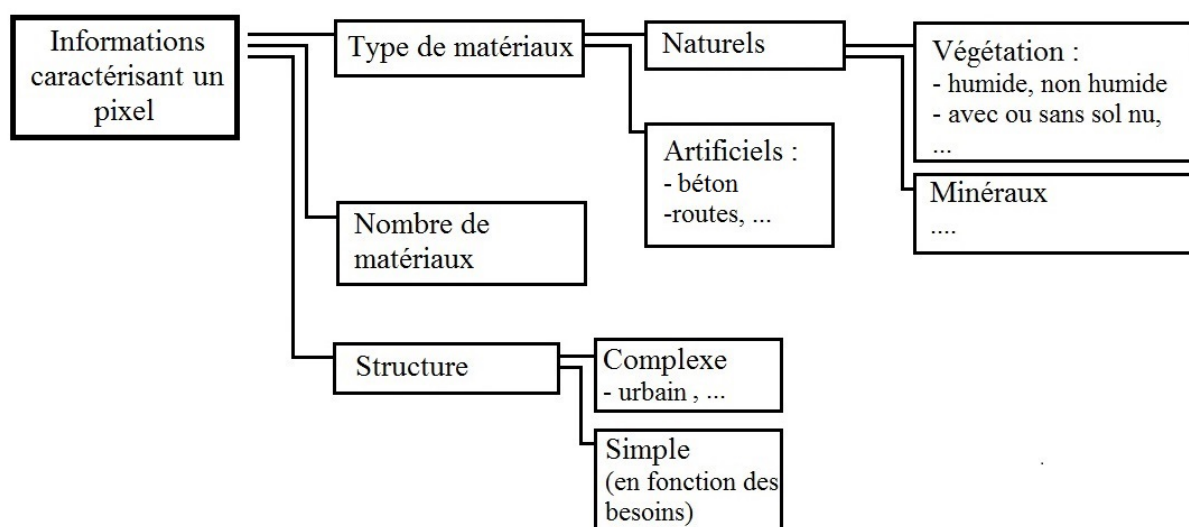
---

23. <http://www.sdss.org/data/>

comme par exemple le type de matériaux considérés (naturels ou artificiels), et ainsi de suite de manière à couvrir l'ensemble des applications développées par la communauté scientifique.



(a)



(b)

FIGURE E.1 – Éléments d'informations nécessaires à la conception et la mise en œuvre d'une BDR : (a) informations caractérisant une image, (b) informations caractérisant un pixel.

Comme abordé au début de cette annexe, le principal résultat recherché au cours de cette étude a été la modélisation de l'ensemble des informations caractérisant une image et un pixel de télédétection et ce, dans l'objectif de structurer une BDR. Le schéma proposé (figure E.1) représente une étape majeure dans la conception d'une telle base de données; ainsi, il serait d'une grande utilité pour la communauté scientifique de rassembler les efforts consentis dans ce très vaste domaine qu'est la télédétection pour enrichir cette proposition et procéder à la deuxième phase de la conception d'une BDR, à savoir la phase relative aux relations existant entre les différentes entités retenues dans le schéma proposé.





## Résumé

Nous proposons dans le cadre de cette thèse, de nouvelles méthodes de séparation aveugle de mélanges linéaires instantanés pour des applications de télédétection.

La première contribution est fondée sur la combinaison de deux grandes classes de méthodes de Séparation Aveugle de Sources (SAS) : l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI), et la Factorisation en Matrices Non-négatives (NMF). Nous montrons comment les contraintes physiques de notre problème peuvent être utilisées pour éliminer une partie des indéterminations liées à l'ACI et fournir une première approximation des spectres de endmembers et des fractions d'abondance associées. Ces approximations sont ensuite utilisées pour initialiser un algorithme de NMF, avec pour objectif de les améliorer. Les résultats obtenus avec notre méthode sont satisfaisants en comparaison avec les méthodes de la littérature utilisées dans les tests réalisés.

La deuxième méthode proposée est fondée sur la parcimonie ainsi que sur des propriétés géométriques. Nous commençons par mettre en avant quelques propriétés facilitant la présentation des hypothèses considérées dans cette méthode, puis nous mettons en lumière les grandes lignes de cette dernière qui est basée sur la détermination des zones bi-sources contenues dans une image de télédétection, ceci à l'aide d'un critère de corrélation. A partir des intersections des droites générées par ces zones bi-sources, nous détaillons le moyen d'obtention des colonnes de la matrice de mélange et enfin des sources recherchées. Les résultats obtenus, en comparaison avec plusieurs méthodes de la littérature sont très encourageants puisque nous avons obtenu les meilleures performances.

**Mots-clés:** Images (multi) hyperspectrales, télédétection, Séparation Aveugle de Sources (SAS), Démélange spectral, modèle de mélange linéaire, Analyse en Composantes Indépendantes (ACI), Factorisation en Matrices Non-négatives (NMF), Analyse en Composantes Parcimonieuses (ACPa).

## Abstract

Within this thesis, we propose new blind source separation (BSS) methods intended for instantaneous linear mixtures, aimed at remote sensing applications.

The first contribution is based on the combination of two broad classes of BSS methods : Independent Component Analysis (ICA), and Non-negative Matrix Factorization (NMF). We show how the physical constraints of our problem can be used to eliminate some of the indeterminacies related to ICA and provide a first approximation of endmembers spectra and associated sources. These approximations are then used to initialize an NMF algorithm with the goal of improving them. The results we reached are satisfactory as compared with the classical methods used in our undertaken tests.

The second proposed method is based on sparsity as well as on geometrical properties. We begin by highlighting some properties facilitating the presentation of the hypotheses considered

in the method. We then provide the broad lines of this approach which is based on the determination of the two-source zones that are contained in a remote sensing image, with the help of a correlation criterion. From the intersections of the lines generated by these two-source zones, we detail how to obtain the columns of the mixing matrix and the sought sources. The obtained results are quite attractive as compared with those reached by several methods from literature.

**Keywords:** (multi) hyperspectral images, remote sensing, Blind Source Separation (BSS), spectral unmixing, linear mixing model, Independent Component Analysis (ICA), Non-negative Matrix Factorization (NMF), Sparse Component Analysis (SCA).